



La descomposición genética y registro de representación semiótica: Modelos cognitivos de los conceptos básicos de álgebra lineal

Genetic decomposition and registering of semiotic representation: cognitive models of basic concepts of linear algebra

M. Sc. Rosa María Almonte Batista

rosalmon65@hotmail.com

Universidad Autónoma de Santo Domingo

Dr. C. Jorge García Ruiz

jorge.garcia@reduc.edu.cu

Dr. C. Isabel Yordi González

isabel.yordi@reduc.edu.cu

Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz"

Los autores se desempeñan como profesores universitarios. **Almonte Batista** trabaja en la Universidad Autónoma de Santo Domingo donde realizó una maestría en Matemática Pura y actualmente cursa un doctorado en la Universidad de Camagüey, Cuba. **García Ruiz** es Doctor en Ciencias Pedagógicas y Profesor Titular de la Universidad de Camagüey con una amplia práctica en la formación de doctores en Cuba y el extranjero y es miembro del tribunal nacional de grado científico en Ciencias Pedagógicas con sede en la zona oriental. **Yordi González** es Licenciada en Matemática, Doctora en Ciencias Pedagógicas y Profesora Consultante en la Universidad de Camagüey, con amplia experiencia en la formación universitaria.

RESUMEN

El artículo presenta un análisis de investigaciones relacionadas con la formación de conceptos del álgebra lineal, orientadas desde la teoría "*descomposición genética*" de Dubinsky y la teoría "*representación semiótica*" de Duval, con el propósito de identificar en las investigaciones el uso de cada concepción teórica y sus aplicaciones en la formación de conceptos básicos de álgebra lineal, se señala como los autores la utilizan para dar explicación a la situación problema tratada, la metodología empleada y resultados obtenidos. Se señalan también las propuestas didácticas recomendadas. Fueron seleccionados artículos y tesis doctorales publicados entre los años 2008 y 2013 en revistas de investigación de matemática educativa.

Palabras clave: Conceptualización, semiótica, descomposición genética, álgebra lineal.

ABSTRACT

The article presents a synthesis of research reports related to the teaching of linear algebra concepts from the perspective of Dubinsky's "*genetic decomposition*" theory and Duval's "*semiotic representation*" theory, in order to identify its reference and application in a sample of educational research. The findings include the explanation given to the particular problem-situation, the methodology and outcomes. Pedagogical proposals recommended are also drawn. Articles and dissertations published between 2008 and 2013 in research journals of mathematics education were sampled.

Keywords: Conceptualization, semiotics, genetic decomposition, Linear Algebra.

La formación de conceptos es una de las problemáticas de la enseñanza de la matemática tratada con mayor frecuencia por los investigadores de esta área en las últimas décadas. Entre ellos se destacan Dubinsky, E. (1997); Duval R. (1993, 2006); Bermúdez, E. A. (2011); Bermúdez, E. A. y González Astudillo, T. (2012); Bueno, S.; Mora, J.; Alvarez, A. y Anarela, A. N. (2012); Dubinsky, E.; Mathews, D. y Thomas, K. (2004); Nomura, J., y Lutaif, B. (2014); Parraguez, M. (2009) dando origen a enfoques pedagógicos que han apoyado el proceso cognitivo que requiere la actividad y pensamiento matemático, aportando la creación de modelos y estrategias pedagógicas que permiten conducir a los estudiantes en la construcción de sus aprendizajes.

En este artículo se expone una síntesis de investigaciones relacionadas con la formación de conceptos del álgebra lineal que utilizan la teoría “descomposición genética” de Dubinsky y la teoría “representación semiótica” de Duval, con el propósito de identificar en ellas el uso de cada una de estas concepciones teóricas, sus aplicaciones en la formación de conceptos básicos de álgebra lineal, señalando como los autores la utilizan para dar explicación a la situación problema tratada, la metodología empleada, los resultados obtenidos y las propuestas didácticas recomendadas.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), conocida como descomposición genética, es una propuesta didáctica que realiza una interpretación particular a la teoría constructivista de Piaget desarrollada por Dubinsky, E. (1997). Su propuesta es una estrategia pedagógica que comienza con el análisis de las construcciones mentales específicas que podrían ser utilizadas para entender un determinado concepto matemático. El propósito pedagógico de las investigaciones que utilizan la teoría APOE es diseñar estrategias para apoyar a los estudiantes a hacer construcciones mentales adecuadas, guiándolos para aplicarlas en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Se analizan además, investigaciones que emplean el enfoque didáctico “uso de representaciones semióticas” para el análisis y construcción de conceptos. En este artículo se muestran investigaciones que se apoyan en los fundamentos propuestos por Duval R. (1993, 2006), quien sostiene que la actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”, así como que dichas representaciones son precisamente semióticas. Agrega que tener en cuenta el tratamiento semiótico de cualquier actividad matemática implica tener en cuenta la utilización de estos registros y los requisitos cognitivos que se involucran. Para este autor el reto del maestro, es al mismo tiempo analizar y determinar por qué los estudiantes tienen problemas recurrentes acerca de la conversión de representaciones, tiene que enfocarse más en cómo lograr que comprendan y realicen adecuadamente la conversión de representaciones en matemática.

Métodos

Para el análisis de la investigación se utilizó como criterio de elección de la documentación en la línea de investigación de “pensamiento matemático”, seleccionando aquellas que analizan las construcciones mentales realizadas por los estudiantes para la formación de conceptos matemáticos y el uso los sistemas de representación semiótica.

El criterio de iniciación de la búsqueda fue, seleccionar para el análisis artículos, tesis e informes de investigaciones que presentaran propuestas didácticas que dieran respuestas a la problemática que presentan los estudiantes en la formación de conceptos en álgebra lineal. De esas investigaciones solo fueron elegidas las que estaban fundamentadas teóricamente en la teoría de representación semiótica promovida por Duval o en la teoría de descomposición genética propuesta por Dubinsky.

La búsqueda fue realizada en la web, utilizando como motor de búsqueda el Google académico porque permite localizar con rapidez artículos, tesis, libros y resúmenes de fuentes diversas con contenidos académicos. Se eligieron 75 documentos en total que abordaban alguna problemática matemática con las teorías mencionadas, nueve de las cuales se referencian en la elaboración del artículo. Para la elección final de los documentos a analizar se eligió un documento para cada uno de los conceptos básicos en álgebra lineal. En la síntesis elaborada de cada investigación se expone el nombre del autor, el propósito de la investigación, la metodología utilizada, la descripción de la forma en que aplican cada teoría, los principales resultados obtenidos y las recomendaciones o propuestas pedagógicas realizadas.

Resultados

Síntesis de investigaciones realizadas utilizando la teoría APOE

El artículo ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?, es una investigación realizada por Oktac, A. y Trigueros, M. (2010). Se investiga la forma en que los estudiantes universitarios aprenden el álgebra lineal, utilizando un análisis teórico desde la teoría Acción-Proceso-Objeto-Eschema (APOE) El estudio trabaja para identificar cuáles construcciones mentales son necesarias para que los estudiantes universitarios construyan los conceptos del álgebra lineal y cuáles son los principales obstáculos que enfrentan. Los datos se recolectan a través de entrevistas semi-estructuradas a estudiantes que habían cursado la materia siguiendo la didáctica establecida en el marco de la teoría APOE.

Los conceptos analizados fueron, espacio vectorial, transformaciones lineales, bases y sistemas de ecuaciones lineales. Como resultado de la investigación se determina que:

- La construcción del concepto espacio vectorial los estudiantes lo logran solo como una concepción acción, no logran una concepción proceso.
- La construcción de los conceptos se encuentra en un nivel intra-operacional de evolucionar.
- Se reportan dificultades para la construcción de esquema de espacio vectorial.
- Los estudiantes no relacionan campo con espacio vectorial.
- Los estudiantes presentan dificultades para coordinar los procesos determinados por cada una de las operaciones definidas.
- Son frecuentes las dificultades para mostrar que tipo de conexiones se logran entre diferentes conceptos del álgebra lineal.

Los resultados muestran la necesidad de diseñar actividades didácticas que permitan a los alumnos una construcción más sólida del álgebra lineal y que la construcción de conceptos por descomposición genética puede construir solo cuando se sigue el curso completo basado en la teoría APOE.

2. Las investigadoras Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010), en su artículo, "*Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory*", proponen una descomposición genética que predice cómo los estudiantes pueden construir el concepto de espacio vectorial como un esquema. La investigación se realiza con diez estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas, a través de la aplicación de un cuestionario y una entrevista. El trabajo se centra en la coordinación entre las dos operaciones que forman parte de la estructura de espacio vectorial y la relación del esquema de espacio vectorial con otros conceptos como la independencia lineal y operaciones binarias.

Como resultado de la investigación se muestra que los estudiantes cuando carecen en las construcciones de los pre-requisitos, presentan muchas dificultades para desarrollar un esquema del concepto *espacio vectorial* suficientemente fuerte y la coordinación entre la estructura de espacio vectorial y sus operaciones no es trivial cognitivamente.

Las autoras en relación con estos resultados proponen que al enseñar el concepto de espacio vectorial se debe hacer énfasis especial en la construcción del esquema de operación binaria, dando a los estudiantes la oportunidad de experimentar con diferentes tipos de conjuntos y operaciones binarias, para que desarrollen la flexibilidad en el pensamiento sobre distintas estructuras que contienen las operaciones habituales.

3. El artículo de Parraguez, M. (2013), "*El rol del cuerpo en la construcción del concepto Espacio Vectorial*", contiene la investigación que explica el rol del cuerpo (o campo) en la construcción del concepto espacio vectorial. La autora toma como base el resultado de una investigación previa (Parraguez, M. y Oktaç, A., 2010). En esa investigación había obtenido como resultado que la construcción del concepto *espacio vectorial* es un esquema construido por la relación de tres esquemas: *conjunto*, *operación binaria* y *axioma*, junto con la coordinación de los procesos que subyacen al objeto suma de vectores y al objeto multiplicación por escalar, y los axiomas que involucran la suma de vectores y la multiplicación por escalar.

Percibida la función de la estructura algebraica *cuerpo* para la comprensión profunda del concepto espacio vectorial, la investigadora decide analizar el papel que juega el cuerpo para la comprensión profunda del concepto espacio vectorial. La metodología utilizada fue una entrevista semi-estructurada de seis preguntas, creada con la intención de examinar construcciones mentales específicas siguiendo *la descomposición genética del concepto espacio vectorial como esquema* de Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). La entrevista estuvo orientada a observar cómo y hasta dónde los estudiantes podían prestar atención a la estructura algebraica sobre la cual un espacio vectorial define sus escalares.

La investigación concluye que los estudiantes no valoran la estructura de cuerpo para construir el concepto espacio vectorial. Es decir, los estudiantes no ven importante indagar en el conjunto con dos operaciones binarias diferentes que satisfacen axiomas –llamado cuerpo. Se valora que la poca valoración que dan los estudiantes a la estructura cuerpo no se puede explicar completamente en la terminología que utiliza la teoría APOE, pero puede afirmar que se relaciona con una descoordinación, que se da entre los procesos que subyacen entre la concepción objeto de espacio vectorial y de cuerpo.

El principal resultado de la investigación es la confirmación de que el rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial está vinculado, a través de la combinación lineal de vectores, con la existencia de vectores linealmente independientes. El reporte de la investigación centra su atención en observar en cada repuesta si el estudiante muestra las construcciones mentales necesarias respecto al cuerpo y al papel que este juega en la construcción del concepto del espacio vectorial.

4- En el artículo "*Construcción de una descomposición genética análisis teórico del concepto transformación lineal*", investigación realizada por Roa, S. & Oktaç, A. (2010). El objetivo de la investigación es dar a conocer el procedimiento seguido por los investigadores para diseñar una descomposición genética exclusivamente sobre el concepto transformación lineal, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. Realizando dos descomposiciones genéticas que describen los posibles caminos para construir el concepto: uno determinado por el mecanismo de interiorización y el otro por el de coordinación.

Se obtuvo como resultado señalamientos didácticos para que el profesor en la planificación de su práctica docente considere los elementos necesarios para construir un concepto determinado, así como la importancia de enfatizar en los elementos involucrados con el concepto que en algunos casos son imperceptibles para los estudiantes, aunque resultan muy obvios para el docente. Otro resultado que

resaltan los investigadores es la importancia de considerar los conceptos previos que determinan el concepto de transformación lineal, (operaciones de suma vectorial y producto por un escalar y la *preservación de combinaciones lineales*), ya que su construcción permite que evolucione la formación del concepto.

5- En el artículo de Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008), "Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría apoe", se muestra una descomposición genética del concepto de *base de un espacio vectorial*. En ella se presenta un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión de este concepto. Para dar la recolección de los datos de las posibles construcciones mentales asociadas al aprendizaje del concepto base, el investigador diseña una entrevista que le permite analizar el proceso de construcción del concepto y determinar las dificultades que enfrentan los estudiantes para construir el concepto de base de un espacio vectorial.

Los resultados arrojan que los estudiantes tienen dificultad en relacionar los conceptos de conjunto y subespacio, conjunto generador e independencia lineal, para mostrar la condición que satisface un conjunto para ser una base lo cual dificulta la comprensión de dicho concepto. Se pudo identificar que los estudiantes tienen dificultad de construir el concepto de base en el nivel de proceso y que le resulta más fácil averiguar si un conjunto de vectores forma una base para un espacio vectorial que hallar una base para un espacio vectorial dado. Esta investigación también revela que resulta muy difícil alcanzar una concepción objeto del concepto de base.

A partir de estos resultados el autor propone que los cursos de álgebra lineal se trabajen con espacios vectoriales diversos. Sugiere la necesidad de hacer hincapié en la relación que guarda el concepto de subespacio vectorial con los otros conceptos que se consideran importantes para la construcción del concepto de base de un espacio vectorial y promueve la necesidad de realizar investigaciones de fondo en relación con la comprensión de otros conceptos relacionado con el de base en un espacio vectorial.

6- La investigación realizada por Sepideh, M., O. (2011), "*Eigenvalues and Eigenvectors: Formal, Symbolic and Embodied Thinking*", consiste en un estudio de caso de *Auckland University* en tres grupos de estudiantes agrupados por el nivel de matemática cursada que incluyen nociones de cálculo y álgebra lineal. La metodología usada fue aplicar una prueba a cada grupo con niveles diferentes de exigencias en el uso de los conceptos vectores y valores propios, con la finalidad de indagar sobre: ¿Cómo piensan los estudiantes acerca de los conceptos de vector propio y valor propio?, ¿Si su pensamiento sobre la definición de valores y vectores propios está influenciada por lo que ha asimilado o por las nociones geométricas conocidas? ¿Cuál es el papel de las definiciones en la estructuración de su pensamiento? y ¿Cómo hacen frente a los obstáculos en el proceso-objeto de la definición de vector propio?

Los investigadores hacen una descripción de las respuestas de los estudiantes en cada grupo, evaluando en el primer grupo la comprensión de los conceptos de vectores propios y valores propios, y la capacidad para llevar a cabo el proceso de su búsqueda en una matriz de 2×2 . En el segundo grupo se centraron en apreciar la comprensión de los estudiantes en álgebra lineal, incluyendo los vectores propios, su representación matricial geométrica y algebraica. Para el tercer grupo evaluaron la habilidad y comprensión de conceptos de álgebra lineal, incluyeron los valores y vectores propios. En los resultados se evidencia que los estudiantes tienden a pensar en los conceptos de vector propio y valor propio principalmente de una forma simbólica. No entienden el significado de las definiciones y no pueden aplicarlas, inclusive en situaciones simples.

Las investigaciones descritas anteriormente corresponden a la enseñanza de algunos conceptos básicos de álgebra lineal enfocados en la teoría APOE, aprovechando de esta los cinco tipos de abstracciones reflexivas consideradas por Dubinsky, E. (1997): la *interiorización*, la *coordinación*, la *encapsulación*, la

generalización y la *reversión*. Las que dan lugar a las construcciones de las acciones, proceso, objeto y esquema que necesita todo estudiante para la construcción adecuada de un concepto.

Síntesis de investigaciones realizadas utilizando la teoría de las representaciones semióticas

El registro de representación semiótica es un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático propuesto por Duval (1993), quien defiende que la comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión. Le atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis) al lenguaje, en sus diversas manifestaciones. La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos.

La investigación “Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano” de Ramírez, O., Fabián, C. & Asuman, O. (2013), es un resultado con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, basados en el análisis de una entrevista que incluye diversas situaciones de Transformaciones Lineales. Utilizando la teoría de registros de representación semiótica se analiza la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas. En esta investigación los autores encuentran evidencias de que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros, al presentársele alguna situación matemática ellos buscan la estrategia más eficiente para resolverla y están en mejores condiciones para lograrlo.

Los investigadores no hacen ninguna propuesta didáctica para desarrollar la habilidad de coordinación de registro semiótico, solo se plantean la interrogante de ¿aparte de la conversión, qué hay que desarrollar para lograr la habilidad de la coordinación en la transferencias de registros semióticos? a la espera que la respuesta a esta pregunta contribuya a mejorar la teoría y a esclarecer las relaciones entre la coordinación de registros, el aprendizaje conceptual y el desarrollo de propuestas de enseñanza que generen una mejor comprensión matemática.

Los investigadores Gruszycki, A. E.; Oteiza, L. N.; Maras, P. N.; Gruszycki, L. O. y Balles, H. A. (2012) al publicar el artículo titulado: “Uso de Geogebra para potenciar las diferentes representaciones en geometría analítica”, revelan la aplicación *de secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra, para estudiantes de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus). Los autores recurrieron a las herramientas proporcionadas por la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval, apoyándose en los siguientes planteamientos:*

- La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad.
- La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos centrados directamente en los contenidos de la enseñanza. Lo necesario para favorecer tal coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus *traducciones mutuas* (Duval, 2006).

Se usan estas afirmaciones y los beneficios de las herramientas informáticas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática para acercarse a los conceptos a través de sus diferentes representaciones. *GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación a través de vistas gráficas, algebraicas y tablas y limita las dificultades en las conversiones de la variedad de registros de representación de los conceptos.*

El resultado de la investigación corrobora que la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados (Duval, R., 2006) y la aplicación de las secuencias didácticas diseñadas y desarrollada con el uso de GeoGebra ayudaron a los estudiantes a superar los errores y dificultades con que se encuentran al abordar conceptos involucrados en geometría analítica y álgebra lineal, logrando una mejor aprehensión conceptual a través de la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático. En el artículo no se muestran características de la secuencia didáctica diseñada. Por consiguiente el uso de los resultados de esta investigación es para el conocimiento de su realización y no para aplicarlo en escenarios similares.

La tesis doctoral titulada “Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos”, bajo la dirección del doctor Bruno D’Amore, elaborada por Rojas, P. J. (2012), no está desarrollada en un concepto básico del álgebra lineal; sin embargo, tiene una influencia directa sobre estos, ya que en la formación de conceptos en álgebra lineal se requiere del tratamiento de representaciones simbólicas.

El autor orienta la investigación a documentar el fenómeno relacionado con las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento. Realiza una descripción y un análisis de los procesos de asignación de sentidos de nueve estudiantes, seis de grado 9º y tres de grado 11º, con base en el trabajo realizado por ellos en tres pequeños grupos en relación con tareas específicas, en las que se indaga por el sentido asignado a ciertas representaciones semióticas y se requiere realizar transformaciones de tratamiento. El autor asume un enfoque de investigación cualitativo, realizando un análisis de tipo descriptivo-interpretativo, desde diferentes perspectivas teóricas, tomando como referencia los trabajos de Duval, R. (1993 y 2006) y Godino, J. (2002 y 2003).

Al finalizar la investigación se muestra evidencia de las causas de las dificultades para articular los sentidos, asociadas a tres hechos fundamentales:

- Que aunque los estudiantes “manejan” las propiedades básicas de los sistemas numéricos que les posibilita realizar las transformaciones de tratamiento requeridas para establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, encuentran dificultad para asociar sentidos diversos a las expresiones dadas.
- La tendencia a anclarse en situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta.
- La “mirada” básicamente icónica de las expresiones algebraicas.

Se agrega a estos el hecho de que los estudiantes ponen en evidencia la importancia de los procesos de interacción como elemento fundamental para posibilitar la articulación de sentidos asignados a expresiones sintácticamente equivalentes. No sólo se dispone de cierto tiempo para socializar y reconocer los argumentos presentados por otros sino también, y sobre todo, para analizar los argumentos presentados por unos y otros, los cuales no son asumidos de manera acrítica.

Discusión

Principales regularidades del análisis sobre la descomposición genética y representación semiótica en la enseñanza del álgebra lineal.

Las investigaciones presentadas en este análisis, aunque con enfoques cognitivos diferentes, tienen aspectos comunes; en ambas los autores se ocupan de identificar y analizar las situaciones a la que los estudiantes se enfrentan en la construcción de conceptos en el álgebra lineal.

Se constata que cuando los estudiantes tienen la habilidad de coordinar registros semióticos y se les plantea una situación matemática, ellos buscan la estrategia más eficiente para resolverla.

Entre las dificultades que presentan los estudiantes, según los estudios analizados, están relacionadas con algunos de los procesos de la asimilación de conceptos matemáticos:

- Los estudiantes tienden a pensar en los conceptos de una forma simbólica, no entienden el significado de las definiciones y no pueden aplicarlas, inclusive en situaciones simples.
- El nivel de construcción de los conceptos se encuentra en el nivel intra-operacional de evolucionar.
- Tienen dificultad al construir los conceptos en el nivel de proceso.
- Presentan falta de coordinación en los procesos en operaciones definidas.
- Se le dificulta hacer conexiones entre los conceptos ya aprendidos.
- Dificultad para desarrollar esquema de los conceptos.
- Dificultad para relacionar los conceptos previos al formar un nuevo concepto.
- Falta de coordinación en los procesos que se dan entre los conceptos.
- Los estudiantes tienen dificultad para asociar las expresiones matemáticas.

Las situaciones problemáticas que han sido desplegadas en este análisis, confirman la necesidad de profundizar en investigaciones pedagógicas que vayan más allá de identificar las debilidades en el aprendizaje matemático, sino que se realicen encaminadas al desarrollo e implementación de estrategias didácticas con mira a superar las dificultades identificadas y activar la participación protagónica de los estudiantes en el proceso de formación de los conceptos matemáticos.

Conclusiones

En las investigaciones seleccionadas se evidencia la importancia tanto de la teoría APOE así como la representación semiótica para dar respuestas a las dificultades de la enseñanza de matemáticas, en particular del álgebra lineal y a la vez proporcionan resultados que pueden ser utilizados como referencias en futuras investigaciones en relación con la comprensión y formación de los conceptos de álgebra lineal.

A pesar de la variedad de investigaciones sobre ambas teoría y sus propuestas didácticas las dificultades en la formación de conceptos en álgebra lineal permanecen. Los estudios realizados no proporcionan estrategias metodológicas a los maestros, que les permitan dirigir las actividades matemáticas con más atención a las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes y que identifiquen cómo las realizan para mejorar la adquisición del significado de los objetos matemáticos.

En cuanto al manejo de los registros de representación semiótica las investigaciones aún son insuficientes en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático y en el accionar para que los estudiantes distingan un objeto de su representación. Se confirma la confusión entre el objeto y su representación, lo que provoca dificultad en la comprensión del concepto.

Recibido: octubre 2014

Aprobado: octubre 2015

Bibliografía

- Arrieta, L. I. (2010). Perspectiva cognitivista. Fundamento para la investigación en Matemática Educativa. *Kelidoscopio*, 7(13), 30-39.
- Bermúdez, E. A., & González Astudillo, T. (2012). Análisis de la comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE. *13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 689-705). Medellín: Universidad de Medellín.
- Bermúdez, E. A. (2011). Análisis de la comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". *Tesis doctoral inédita*. Universidad Salamanca.
- Bueno, S. M. (2012). El aprendizaje de conceptos matemáticos desde una perspectiva desarrolladora. *Pedagogía Universitaria*, XVII(1), 76-86.
- Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level. *Resources for teaching Linear Algebra*, 85-106.
- Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2004). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Netherlands: Springer.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad de Matemática de España. RSME*, 9(1), 143-168.
- Gamboa, J. L. (1996). Condiciones necesarias para la construcción de conceptos matemáticos.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2 y 3), 237-284.
- Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Gruszycki, A. E., Oteiza, L. N., Maras, P. M., Gruszycki, L. O., & Balles, H. A. (2012). Uso de Geogebra para potenciar las diferentes representaciones en geometría analítica. *Conferencia Latinoamericana de Geogebra* (págs. 520-524). Montevideo: Instituto de Profesores Artiga.
- Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics visualization*. Mexico: Cinvestav.
- Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

- Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*, 1-19.
- Martínez, E. C., Quintero, G., & Barrios, E. (julio-diciembre de 2013). Métodos y procedimientos del proceso de autopreparación en matemática del profesional técnico en formación. *Transformación*, 9(2), 14-28. Disponible en <http://transformacion.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/87/85>
- Nomura, J., & Lutaif, B. (2014). Proceso de diseño de la acción-vector propio de valor propio objeto matemático. *VIDYA*, 34(1), 173-186.
- Oktac, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (13), 4-11.
- Parraguez, M. (2009). Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial. *Tesis doctoral inédita*. Instituto Politécnico Nacional, México.
- Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Educación Matemática*, 25(1), 133-154.
- Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112–2124.
- Ramírez, O. F. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales. *Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (CEMACYC)* (págs. 1-4). Santo Domingo: CIAEM.
- Ramírez, O., Fabián, C., & Asuman, O. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales. *Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (CEMACYC)* (págs. 1-4). Santo Domingo: CIAEM.
- Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Rojas, P. J. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos*. Tesis doctoral inédita. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Stewart, S., & Thomas, M. O. (2011). Student Thinking about Eigenvalues and Eigenvectors: Formal, Symbolic and Embodied Notions. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 275-296.