

Memoria científica original

El movimiento de la variable en límites laterales de funciones irracionales como recurso para la enseñanza del cálculo diferencial

The movement of the variable in one-sided limits as a resource for teaching differential calculus

Neel Báez Ureña^{1*},  <https://orcid.org/0000-0001-7208-4299>

Elizabeth Rincón Santana²,  <https://orcid.org/0000-0001-7588-9586>

Ramón Blanco Sánchez³,  <https://orcid.org/0009-0005-7149-2000>

Marines Angeris Artiles³,  <https://orcid.org/0000-0002-9708-484X>

¹ Universidad Acción Pro Educación y Cultura (UNAPEC), República Dominicana

² Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD), República Dominicana

³ Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Cuba

* Autor para la correspondencia: neelbaez02@gmail.com

Resumen

Introducción: La comprensión del movimiento de la variable en el concepto de límite funcional constituye un desafío para el estudio del cálculo diferencial e integral. Esto se relaciona con la multiplicidad de significados del infinito matemático, que trasciende la noción cotidiana de magnitud.

Objetivo: Describir el comportamiento de la variable en funciones irracionales para el desarrollo de habilidades de análisis del movimiento de la variable en estudiantes de ingeniería. Asimismo, ofrecer recursos didácticos que permitan a los docentes abordar los límites laterales desde una perspectiva conceptual y procedimental.

Métodos: Se realizó un análisis didáctico-descriptivo mediante la resolución de casos de funciones irracionales de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$ (con n par y $g(x)$ polinómica). Se complementó con un cuasi-experimento pedagógico en dos grupos de estudiantes de ingeniería: uno recibió instrucción explícita sobre el movimiento de la variable y otro siguió un enfoque tradicional.

Resultados: El grupo que recibió la instrucción focalizada en el análisis del movimiento de la variable obtuvo un rendimiento superior en todos los ítems evaluados, con diferencias porcentuales de aprobación que oscilaron entre 4 y 10 puntos respecto al grupo controlizado.

Conclusión: La enseñanza explícita del movimiento de la variable en funciones irracionales, apoyada en el uso de múltiples registros de representación semiótica, contribuye a una comprensión del concepto de límite y reduce los errores procedimentales comunes.

Palabras clave: límites laterales, funciones irracionales, enseñanza del cálculo, movimiento de la variable, registros de representación

Abstract

Introduction: Understanding the movement of the variable in the concept of functional limit constitutes a challenge for students beginning the study of differential and integral calculus. This difficulty is related to the multiple meanings of mathematical infinity, which transcends the everyday notion of magnitude.

Objective: To describe the behaviour of the variable in irrational functions to develop students' skills in variable movement analysis. Additionally, to offer didactic resources that allow teachers to address lateral limits from a conceptual and procedural perspective.

Methods: A descriptive-didactic analysis was carried out by solving cases of irrational functions of the form $\sqrt[n]{g(x)}$ (with n even and $g(x)$ polynomial). It was complemented with a quasi-experiment involving two engineering student groups: one received explicit instruction on variable movement and the other followed a traditional approach.

Results: The group that received instruction focused on variable movement analysis outperformed the control group in all assessed items, with pass rate differences ranging from 4 to 10 percentage points, depending on the complexity of the case studied.

Conclusion: Explicit teaching of variable movement in irrational functions, supported by the use of multiple registers of semiotic representation, significantly contributes to a more solid understanding of the limit concept and reduces common procedural errors.

Keywords: one-sided limits, irrational functions, calculus teaching, variable movement, representation registers.

Recibido: 17 de abril de 2026

Aprobado: 1 de septiembre de 2026

Introducción

El dominio del concepto de límite funcional, tanto a nivel operativo como conceptual, resulta fundamental para los estudiantes de ingeniería, pues sienta las bases del cálculo diferencial e integral (Báez & Blanco, 2020). Su estudio permite comprender los diversos movimientos de las variables en relación con el concepto de infinito matemático, el cual no se limita a lo muy grande, sino que abarca también la cercanía y la pequeñez (Mosquera-López *et al.*, 2023).

En la enseñanza tradicional, los límites laterales se analizan principalmente para verificar la existencia del límite en un punto. Con relativa frecuencia el procedimiento consiste en que coincidan ambos límites laterales para garantizar la existencia del límite en el punto, lo cual es innegablemente importante. Sin embargo, se presta menor atención al movimiento de la variable en funciones irracionales que, a diferencia de las funciones definidas en todo el entorno, solo poseen uno de los límites laterales en determinados puntos.



Para fundamentar teóricamente la propuesta, se articulan los aportes de Duval (2004) sobre la necesidad de la conversión entre registros semióticos (algebraico, gráfico y numérico) con la distinción entre conocimiento conceptual y procedimental propuesta por Rittle-Johnson y Koedinger (2009). En esta línea, se documenta que los errores en límites laterales suelen originarse en una interpretación estática del infinito y en el predominio del tratamiento algebraico sobre el análisis del dominio y el signo de la función. La ausencia de un trabajo sistemático con conversiones entre registros impide que los estudiantes perciban el comportamiento de la variable en las proximidades del punto crítico (Guarin Amorocho & Parada Rico, 2023).

Esta omisión dificulta la comprensión del concepto; como consecuencia, los estudiantes suelen cometer errores al analizar estos casos de manera simplista. Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{x-2}$, al calcular el límite de la función $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2$ generalmente ignoran la discontinuidad en $x = 2$, e intentan una evaluación directa que conduce a $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$. Este resultado –estrictamente hablando– es incorrecto, por no existir el límite izquierdo pues su expresión no está definida en los números reales.

Errores como este evidencian una formación previa ineficiente, en la que no se enfatiza suficientemente la necesidad de analizar el dominio y el recorrido de una función antes de operar con ella (Byas & Blanco, 2017). Esta problemática está vinculada al conocimiento procedimental del estudiante, pues a menudo se prioriza el resultado final sin prestar suficiente atención a los detalles del proceso (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009).

Teniendo en cuenta lo anterior, se postula que la excesiva atención a la complejidad algebraica en los ejercicios de límite puede desviar el foco de la comprensión conceptual. Por tal razón, este artículo tiene como objetivo describir el comportamiento de la variable en funciones irracionales para el desarrollo de habilidades de análisis del movimiento variable en estudiantes de ingeniería. Asimismo, se pretende ofrecer recursos didácticos que permitan a los docentes abordar los límites laterales desde una perspectiva conceptual y procedimental.

Métodos

El estudio se desarrolló en dos fases complementarias. La primera fase, de naturaleza teórica, consistió en un análisis matemático riguroso de la estructura algebraica de funciones irracionales de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, donde n es par, $g(x)$ es una función polinómica y $g(c) = 0$. El propósito de esta fase fue caracterizar el comportamiento de los límites laterales en puntos donde la expresión subradical se anula. Este análisis –que partió del estudio de casos particulares– permitió construir una clasificación sistemática de tres casos generales basados en la naturaleza de la raíz c de $g(x)$: raíz simple, raíz de multiplicidad impar y raíz de multiplicidad par. Este resultado se transformó



en un recurso didáctico explícito para la enseñanza del concepto de límite lateral.

La segunda fase, de naturaleza empírica, adoptó un diseño cuasiexperimental con dos grupos paralelos de estudiantes de ingeniería (Grupo A y Grupo B), ambos atendidos por profesores de similar experiencia. Tuvo como objetivo evaluar la efectividad del recurso didáctico en el rendimiento de los estudiantes al resolver problemas de límites laterales en funciones irracionales.

Participantes y contexto

Para el cuasiexperimento, la muestra estuvo conformada por 79 estudiantes de primer año de ingeniería de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), distribuidos en dos grupos naturales: Grupo A (experimental, $n=38$) y Grupo B (control, $n=41$). La edad promedio fue de 19,2 años ($DE = 1,4$) y el 62 % eran varones. Todos habían aprobado un curso de precálculo con calificaciones promedio similares (Grupo A: 72,4 sobre 100; Grupo B: 71,9). Proviene de centros educativos públicos (65 %) y privados (35 %), con predominio de escuelas públicas. Ambos grupos compartían el mismo plan de estudios y habían cursado previamente los mismos contenidos de matemática básica.

Procedimiento

El cuasiexperimento adoptó una estructura clásica de investigación. Consistió en la aplicación de una prueba diagnóstica de entrada (*pretest*), seguido de una intervención pedagógica y cerró con la aplicación de un diagnóstico final, también conocido como *postest*.

Pretest

El *pretest* contenía cinco ejercicios que exigían analizar el dominio de una función irracional de índice par y determinar la existencia de límites laterales en puntos donde el radicando se anula. Los ítems incluían ejemplos concretos como: analizar el dominio de $f(x) = \sqrt{x-2}$ y determinar si existe $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$; estudiar el comportamiento de $g(x) = \sqrt[3]{(x-2)}$ en las proximidades de $x = 2$; y explorar casos con raíces de multiplicidad par como $\sqrt{-(x-2)^2}$.

Se prestó especial atención a que los estudiantes justificaran la existencia o no del límite a partir del signo del radicando y no solo mediante manipulación algebraica. Los resultados se compararon con una prueba *t* de *Student* para muestras independientes, que no arrojó diferencias estadísticamente significativas ($t=0,42$; $gl=77$, $p=0,68$). Asimismo, se aplicó la prueba *U* de Mann-Whitney como contraste no paramétrico, obteniendo $U=756,5$ ($p=0,72$), lo que confirma la homogeneidad inicial de los grupos en cuanto a conocimientos previos sobre el objeto de estudio. Esta equivalencia permitió atribuir las diferencias posteriores a la intervención.

Intervención didáctica

En el Grupo A (experimental) se dedicaron dos sesiones de clase de 90 minutos cada una (total 3 horas) al análisis explícito de los casos de movimiento de la variable en funciones irracionales. La intervención incluyó materiales diseñados específicamente:

- Guía de trabajo estructurada en tres columnas: (1) expresión algebraica de $f(x)$, (2) tabla de signos del radicando $g(x)$, (3) esbozo gráfico de $f(x)$ y determinación de límites laterales.
- Presentación guiada de los tres casos teóricos (raíz simple, raíz de multiplicidad impar, raíz de multiplicidad par) con apoyo de representaciones gráficas elaboradas en GeoGebra.
- Actividades de conversión entre registros: se proporcionaba la expresión analítica de $f(x)$ y se pedía a los estudiantes construir la tabla de signos, esbozar la gráfica y decidir la existencia del límite.
- Discusión colectiva de errores típicos, como la evaluación directa sin considerar el signo del radicando.

En el Grupo B (control) se desarrolló la enseñanza de manera tradicional, siguiendo el libro de texto habitual, con énfasis en la manipulación algebraica y la evaluación directa de límites. Se trabajó la simplificación algebraica y la evaluación en el punto, sin hacer hincapié en el análisis sistemático del dominio y el movimiento de la variable.

Para evitar sesgos, los mismos profesores impartieron ambas modalidades; se diseñaron guías didácticas estandarizadas y se realizó una reunión previa para acordar los contenidos y la duración, asegurando que la única diferencia fuera el enfoque en el movimiento de la variable y el uso de múltiples registros. La prueba de comprobación se administró una semana después de la intervención para permitir el afianzamiento de los contenidos y evitar el efecto de la memoria a corto plazo, sin que mediara práctica adicional dirigida entre ambas fechas.

Instrumento de comprobación (postest)

La variable dependiente fue el rendimiento en la resolución de problemas de límites, medido mediante una prueba de comprobación administrada al finalizar la unidad didáctica (una semana después de la intervención). El instrumento evaluó la siguiente tipología de ejercicios:

1. Analizar los límites de la función
$$f(x) = \begin{cases} -3-x & \text{si } x \leq -2 \\ 2x & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2 \text{ y } x = -2$$
2. Analizar los límites de la función en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



3. Analizar los siguientes límites en el punto indicado:

$$3.1) \lim_{x \rightarrow \pi} (\ln(\operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}(x))$$

$$3.2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)}$$

$$3.3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)}$$

Cada ítem se calificó como aprobado si el estudiante justificaba correctamente la existencia o no de los límites laterales mediante el análisis del signo del radicando y el dominio de la función, sin limitarse a la evaluación directa. Se otorgó puntuación parcial si el estudiante identificaba el resultado correcto pero no justificaba adecuadamente el razonamiento.

Análisis estadístico

Para comparar los resultados del postest, se aplicó la prueba *t* de *Student* para muestras independientes en cada ítem, previa verificación de normalidad (Shapiro-Wilk) y homogeneidad de varianzas (Levene). Dado que algunas distribuciones no cumplían el supuesto de normalidad, se complementó con la prueba U de Mann-Whitney. Se calculó el tamaño del efecto mediante la *d* de Cohen para cada ítem, interpretándose según los criterios convencionales (Cohen, 1988): pequeño (0,2), mediano (0,5) y grande (0,8). El nivel de significación se fijó en $\alpha=0,05$. Los análisis se realizaron con el software SPSS versión 25.

Consideraciones éticas

El estudio contó con la aprobación del Comité de Ética de la Universidad Autónoma de Santo Domingo. Todos los estudiantes participantes firmaron un consentimiento informado en el que se les explicó el propósito de la investigación, la confidencialidad de los datos y su derecho a retirarse en cualquier momento. Los resultados obtenidos solo fueron utilizados con fines de investigación.

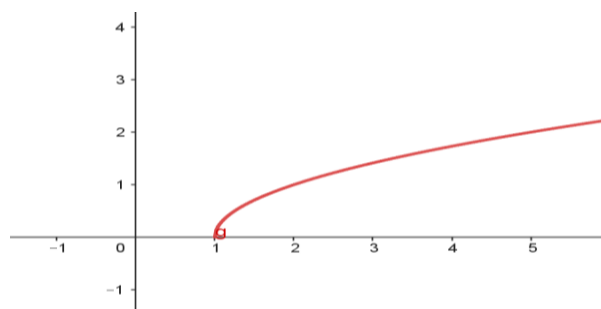
Resultado y discusión

1. Caracterización del comportamiento de los límites laterales en puntos donde la expresión subradical se anula

El análisis de casos particulares permitió tomar un primer ejemplo para la argumentación teórica; se trata de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, la cual presenta una dificultad para los estudiantes que no han sido entrenados en el análisis de casos. Aquí la falta de precisión del movimiento de la variable conduce a que muchos estudiantes no pongan atención a que si $x < 1$ la cantidad subradical es negativa y por lo tanto el dominio de la función solo es para las $x \geq 1$, tal como se muestra en la Figura 1:



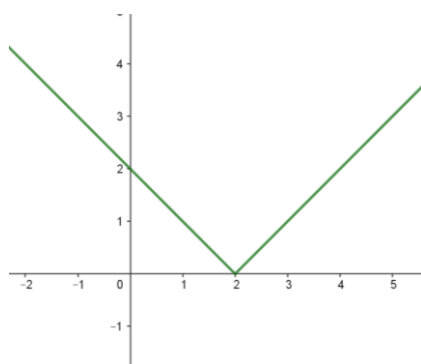
Figura 1. Recorrido de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$



En gran medida esto se debe al poco uso de los cambios de representación semiótica de los objetos matemáticos. La literatura especializada abunda en trabajos donde se explica la necesidad de usar diferentes registros de representación para que los estudiantes puedan apreciar las diferentes características del objeto estudiado (Báez & Blanco, 2020; Elia & Spyrou, 2006) dado que es muy poco probable que una representación específica muestre todas las características del objeto estudiado.

En el caso de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, cuyo gráfico (Figura 2) evidencia que es una función definida en todo su dominio, de la representación analítica no es inmediato el dominio y recorrido de la función, pero de su representación gráfica resultan inmediatos estos aspectos de la función:

Figura 2. Dominio y recorrido de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$



Por lo que el análisis de $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ se simplifica pues del gráfico se puede apreciar que la variable se aproxima a 2 de la misma manera por la derecha que por la izquierda; o sea, la variable se mueve al punto de la misma manera por la derecha que por la izquierda, por lo que se puede obtener el valor del límite por evaluación directa. Desde luego este análisis también se puede hacer de forma analítica, pero es oportuno mostrar a los estudiantes diferentes recursos.

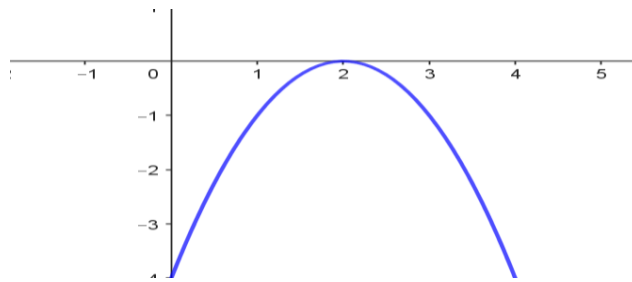
Analíticamente se tiene que: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, donde se aprecia con facilidad que es una función con dominio y recorrido en todos los reales.

Se considera ahora un tercer caso: Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$, de nuevo en este caso el alumno considera que puede evaluar directamente y obtener:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{-x^2 + 4x - 4} = \sqrt{-2^2 + 4(2) - 4} = \sqrt{0} = 0$$

La función del radicando $g(x) = -x^2 + 4x - 4$ es una parábola con el vértice en $(2, 0)$, pero como el coeficiente de x^2 es negativo la parábola abre hacia abajo (hacia los valores negativos), por lo que es el único valor real del radicando, como no existen límites laterales, por consiguiente no existe el límite en el punto. Este análisis se puede corroborar con la representación gráfica de $g(x) = -x^2 + 4x - 4$ (Figura 3):

Figura 3. Parábola invertida $g(x) = -x^2 + 4x - 4$



El hecho de que a ambos lados del punto suceda lo mismo y, a pesar de eso no exista el límite, le crea cierta duda al estudiante respecto a su concepción de que no existe el límite en el punto cuando hay valores diferentes a ambos lados del punto. Por esta razón hay que retomar la definición de límite:

Sea f una función definida en una vecindad del punto b . Se dice que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$, si para cada número positivo $\varepsilon > 0$, por pequeño que este sea, es posible determinar un número positivo $\delta > 0$, tal que para todos los valores de x , diferentes de b , que satisfacen la desigualdad $|x - b| < \delta$ se verifica la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

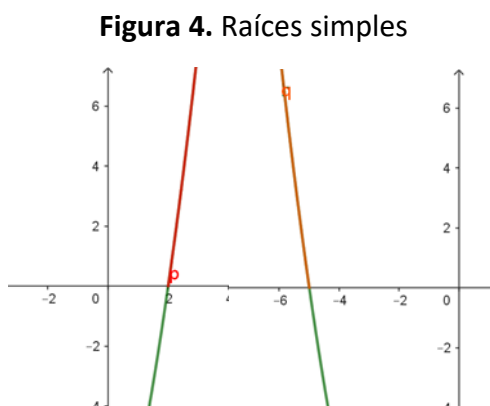
Como se puede ver en este caso no existe ningún valor de x en el intervalo $|x - b| < \delta$ por lo que se puede afirmar que no existe el límite en $(2, 0)$. Aquí se debe destacar que los objetos matemáticos al no tener existencia física están rigurosamente determinados por su definición (Báez & Blanco, 2020; Byas & Blanco, 2017).

Basado en los ejemplos anteriores se pueden concretar algunas precisiones generales para orientar a los estudiantes en el trabajo con este tipo de funciones de la forma: $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{g(x)}$, donde n es par, $g(x)$ es una función polinómica y $g(c) = 0$

Caso 1: si c es raíz simple de $g(x)$ lo que implica que $g(c) = 0$ y $g'(c) \neq 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{g(x)}$ nunca existe.

Justificación: Si c es raíz simple de $g(x)$ entonces hay un cambio de signos para valores alrededor de c , lo que implica que uno de los límites laterales no existe.

Aquí es importante el apoyo gráfico (Figura 4) siguiente:



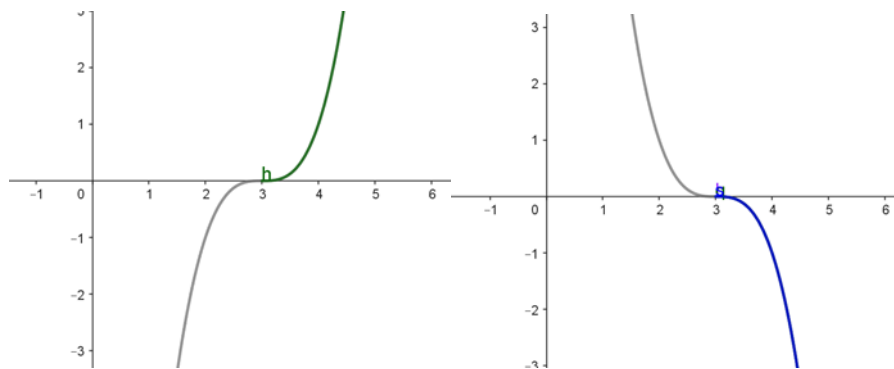
En el primer gráfico se puede ver que los valores a la izquierda de 2 son negativos y en el segundo los valores a la derecha de -5 son negativos. Por lo tanto, para las condiciones dadas y la raíz es simple no existe el límite en el punto.

Para la explicación de por qué no existe el límite en el caso analizado se aprecia la necesidad del uso de diferentes representaciones semióticas para que los estudiantes puedan apreciar diferentes aspectos del objeto estudiado, específicamente el movimiento de la variable (Elia & Spyrou, 2006).

Caso 2: si c es raíz de multiplicidad impar de $g(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{g(x)}$, nunca existe.

Una raíz de multiplicidad impar implica un corte de la gráfica de g en el eje x donde la concavidad cambia; es decir, si c es una raíz de multiplicidad impar de g , es además un punto de inflexión de g , lo que determina un cambio de signo para valores próximos a c , por lo que uno de los límites laterales no existe. Aquí también es muy útil el apoyo gráfico (Figura 5) para que los estudiantes puedan materializar la explicación anterior mediante la materialización semiótica del objeto matemático (Rodríguez & López Fernández, 2010):

Figura 5. Raíces de multiplicidad impar



En este ejemplo $c = 3$ es un punto donde la concavidad cambia, por lo que en el primer caso no existe el límite lateral para valores menores que 3 y en el segundo no existen para valores mayores que 3.

En este punto es oportuno insistirles a los estudiantes sobre la necesidad de tener presente las condiciones del problema con el que se trabaja, pues el hecho de que la función tenga una rama negativa alrededor del punto que se analiza no impide verificar la relación $|x - b| < \delta$, pero no se puede olvidar que la función que se está considerando es una cantidad subradical en una raíz de índice par por lo que la raíz no existe para valores negativos de $g(x)$. Esta aclaración puede parecer poco importante pero se hace con el objetivo de recordar a los estudiantes la necesidad de tener en cuenta las hipótesis del problema con el que se trabaja.

Caso 3: si c es raíz de multiplicidad par de $g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{g(x)}$ puede o no existir, a continuación se analizan los siguientes casos;

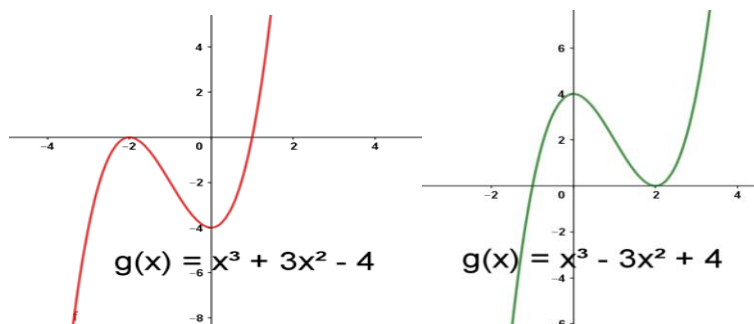
- 3.1) si g es de grado 2 y el coeficiente principal es mayor que cero, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{g(x)} = 0$ existe, ya que g es una parábola con vértice en el eje x que abre hacia arriba (este caso ya fue analizado) lo que implica que $g(x)$ es mayor que cero para todo su dominio.
- 3.2) si g es de grado 2 y el coeficiente principal es menor que cero la parábola tiene el vértice en el eje x pero abre hacia abajo, ya que $g(x)$ es menor que cero para todos los valores de su dominio y por lo tanto $\sqrt[n]{g(x)}$ no existe, por lo que no se puede hablar de un límite real para una expresión que no existe en $\mathbb{R}$
- 3.3) si g es un polinomio de grado 3, en este caso surgen varias alternativas, pero cuando solo tiene una raíz simple el análisis coincide con los casos anteriormente analizados. Por lo tanto, se le dedicará la atención a los casos en que el polinomio tenga tres raíces, lo que da lugar a diferentes situaciones.

En los polinomios de grado 3 una rama abre hacia arriba (buscando los valores positivos) y otra hacia abajo (buscando los valores negativos). Además, por el teorema fundamental del álgebra un polinomio de grado 3 tiene 3 raíces reales o complejas. Incluso, las raíces complejas aparecen por pares cada raíz con su conjugada, por lo tanto si el polinomio es de grado 3 tiene una raíz doble también tendrá una simple.

Por otra parte, cuando el coeficiente principal es positivo, la parte izquierda abre hacia los valores negativos y la derecha hacia los positivos. Por lo tanto, si la raíz doble es menor que la simple, los valores de la función alrededor de la misma son negativos y, alrededor de la simple serán negativos a la izquierda y, positivos a la derecha de la raíz, por lo que en este caso no existe el límite.

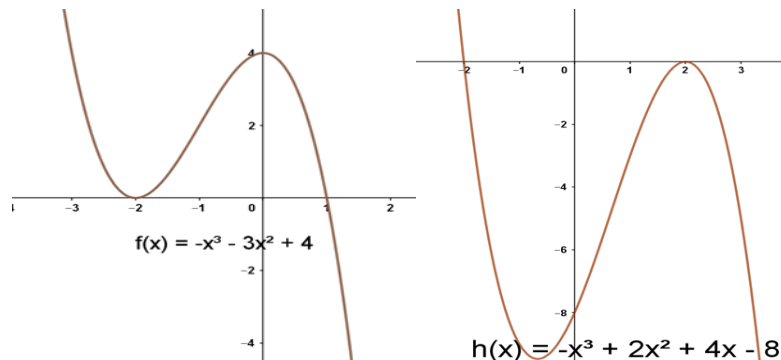
Pero, si la raíz simple es menor que la raíz doble la función tendrá valores positivos y negativos alrededor de la raíz simple, por lo que no existirá el límite en esta raíz. Pero alrededor de la raíz doble tendrá valores positivos, por lo que existirá el límite en esta raíz, como se ilustra (Figura 6) a continuación:

Figura 6. Polinomio de grado 3



Por otra parte, cuando el coeficiente de la variable de mayor grado (coeficiente principal) es negativo, entonces la rama de la izquierda crece por valores positivos y la de la derecha por valores negativos. Por lo que: si la raíz doble es menor que la simple, existirá el límite en la raíz doble, pero no en la simple. En caso de que la raíz simple sea menor no existirá el límite en ninguna de las dos raíces, como se ilustra en la Figura 7:

Figura 7. Coeficiente principal negativo



Tener presente que se está hablando de los valores en la función subradical, por lo que cuando esta función toma valores negativos no está definido en los reales y no puede existir el límite.

Este análisis es aplicable a cualquier radicando polinomial de la forma: $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ con $a_n \neq 0$, teniendo en cuenta:

- 1) Las raíces de multiplicidad par de $g(x)$
- 2) Las raíces simples o de multiplicidad impar de $g(x)$
- 3) El signo del coeficiente principal a_n
- 4) La posición relativa de cada raíz múltiple con respecto a las demás raíces

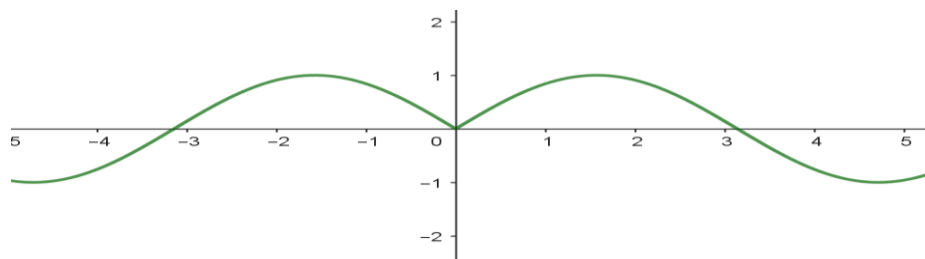
En general, la actividad de considerar diferentes representaciones de un concepto matemático no es considerada fundamental por muchos profesores para la construcción de dicho concepto. En particular, las actividades que involucran transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento (Duval, 2004) son minimizadas por los profesores al estudiar las funciones, desconociendo que promueven un mejor entendimiento de las funciones y facilitan el desarrollo de procesos de visualización (Amaya De Armas *et al.*, 2016).

Desde una perspectiva didáctica, el análisis del cálculo de los límites en los diferentes casos –en este tipo de funciones– no se hace solo con el objetivo de adiestrar al estudiante en este tema específico. El trabajo procedimental brinda un entrenamiento a los estudiantes que permite mejorar su comprensión sobre el comportamiento del límite de funciones, en particular sobre las implicaciones de los límites laterales en la existencia del límite de una función. Por ejemplo, en el caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ los estudiantes comprenden mejor que no existe el límite dado, que por la izquierda la variable se aproxima a cero por valores negativo y, por la derecha, por valores positivos.

Sin embargo, en el caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{|x|} = 0$ se aprecia que el numerador es el producto de dos funciones impares por lo tanto, es par. El denominador es par; por lo tanto, la función es par, por

lo que su comportamiento es el mismo a la izquierda y derecha del eje x . En otras palabras, la variable se mueve de la misma forma a ambos lados del punto como se puede ver en la Figura 8:

Figura 8. Comportamiento de la función par



II. Resultados de la intervención didáctica

Tabla 1. Resultados del examen de comprobación

ítem	Grupo A (experimental, n= 38)				Grupo B (control, n= 41)			
	Aprobados	%	Desaprobados	%	Aprobados	%	Desaprobados	%
1	27	71,05	11	28,95	26	63,41	15	36,59
2	28	73,68	10	26,32	26	63,41	15	36,59
3.1	23	60,53	15	39,47	23	56,10	18	43,90
3.2	22	57,89	16	42,11	22	53,66	19	46,34
3.3	22	57,89	16	42,11	21	51,22	20	48,78

Nota. Fuente: Registro de evaluaciones

La Tabla 1 muestra que el Grupo A (experimental) superó al Grupo B (control) en todos los ítems. Las diferencias porcentuales de aprobación fueron: 7,64 puntos en el ítem 1; 10,27 puntos en el ítem 2; 4,43 puntos en el 3.1; 4,23 puntos en el 3.2 y 6,67 puntos en el 3.3.

Estos resultados reflejan que la enseñanza explícita de los casos de movimiento de la variable y el uso de distintos registros de representación semiótica benefició especialmente la resolución de los ejercicios con raíz simple (ítems 1 y 2). En ellos, el error más frecuente del grupo control fue realizar una evaluación directa ignorando que uno de los límites laterales no existe debido a que el radicando toma valores negativos. El grupo experimental, en cambio, mostró mayor habilidad para examinar el dominio y el signo del radicando antes de operar, lo que condujo a una diferencia más amplia.

En los ítems 3.1, 3.2 y 3.3, correspondientes a raíces de multiplicidad par con diversas configuraciones de signo, la ventaja del grupo experimental persistió pero fue más modesta. La tasa de aprobación en ambos grupos fue más baja que en los ítems anteriores, lo que indica que estos casos representan un mayor desafío cognitivo. Para resolverlos correctamente, el estudiante debe integrar el análisis de la multiplicidad de la raíz, el signo del coeficiente principal

y la posición relativa de las raíces, transformando la información algebraica en una representación gráfica o en un juicio sobre la existencia del límite.

La instrucción explícita ayudó a que una proporción mayor de estudiantes del Grupo A pudiera coordinar estos criterios, pero la diferencia menor sugiere que la consolidación de este razonamiento requiere más tiempo de práctica y una interiorización más profunda de las transformaciones de representación. La Tabla 2 muestra los estadísticos descriptivos y los resultados de las pruebas paramétricas, no paramétricas y el tamaño del efecto.

Tabla 2. Comparación de puntuaciones entre grupos y tamaño del efecto

Ítem	Grupo A (experimental, n= 38)		Grupo B (control, n= 41)		<i>t</i> (<i>gl</i> =77)	<i>p</i> (<i>t</i>)	<i>U</i>	<i>p</i> (<i>U</i>)	<i>d</i> de Cohen ^a
	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar					
1	7,42	2,10	6,05	2,45	2,68	0,009*	545	0,011*	0,62
2	7,68	1,95	6,22	2,30	3,04	0,003*	512	0,005*	0,69
3.1	6,05	2,80	5,51	2,75	0,87	0,387	703	0,392	0,20
3.2	5,89	2,95	5,32	2,85	0,86	0,392	711	0,421	0,19
3.3	5,97	2,88	5,15	2,92	1,26	0,211	660	0,184	0,28

Nota. ^a Magnitud de los tamaños del efecto: 0,2 pequeño; 0,5 mediano; 0,8 grande

* $p < 0,05$ se considera significativo.

Los resultados de la Tabla 2 indican que las diferencias son estadísticamente significativas solo para los ítems 1 y 2 ($p < 0,05$ en ambas pruebas), con tamaños del efecto medianos ($d = 0,62$ y $0,69$ respectivamente), lo que indica una magnitud prácticamente relevante. Para los ítems 3.1 a 3.3 no se alcanza significación estadística ($p > 0,05$) y los tamaños del efecto son pequeños ($d < 0,3$), aunque se mantiene una tendencia favorable al grupo experimental.

Para interpretar las diferencias no significativas en los ítems 3.1–3.3, resulta útil la teoría de la carga cognitiva (Sweller, 1988), pues estos ítems exigen coordinar múltiples criterios (multiplicidad, signo, posición relativa), lo que puede saturar la memoria de trabajo de los estudiantes, especialmente en un tiempo de instrucción limitado. Estos hallazgos coinciden con los reportados por Guarín Amorócho y Parada Rico (2023), quienes señalan que la comprensión profunda del límite requiere un tránsito fluido entre lo algebraico y lo geométrico, así como tiempo suficiente para la asimilación de los distintos registros de representación.

En conjunto, los hallazgos confirman que la propuesta didáctica contribuye a reducir el error de evaluación directa y a fortalecer la comprensión conceptual del límite, sobre todo cuando la complejidad de la función subradical es moderada. Las diferencias observadas guardan correspondencia directa con los casos teóricos sistematizados en la primera fase del estudio.

Conclusiones



El análisis teórico permitió clasificar los límites laterales de funciones irracionales en tres casos según la naturaleza de la raíz del radicando: raíz simple, raíz de multiplicidad impar y raíz de multiplicidad par. Esta clasificación constituye un recurso didáctico que explicita la necesidad de analizar el dominio y el signo del radicando antes de operar.

La intervención didáctica, que enfatizó el movimiento de la variable apoyada en múltiples registros de representación semiótica, produjo mejoras en el rendimiento del grupo experimental en todos los ítems evaluados. La diferencia más notable se observó en los ejercicios básicos, con tamaños del efecto medianos, donde el error de evaluación directa fue menor. En los casos de mayor complejidad (raíz de multiplicidad par con distintas configuraciones de signo), la ventaja persistió pero fue más modesta, lo que sugiere que la comprensión profunda de estos casos demanda un trabajo más prolongado y una integración más fina entre los registros algebraico y gráfico.

Los resultados confirman que la enseñanza explícita del análisis previo del dominio y del comportamiento de la variable, en contraposición a un enfoque puramente procedimental, contribuye a reducir errores conceptuales frecuentes y favorece una comprensión más sólida del concepto de límite. Se evidencia, además, el papel fundamental de las transformaciones de representación (conversión y tratamiento) para que los estudiantes perciban el comportamiento de la función en entornos donde la expresión analítica resulta opaca.

Se identifican limitaciones del estudio que deben ser consideradas: el uso de grupos (no aleatorizados) limita la generalización de los hallazgos; el contexto específico (Universidad de República Dominicana) puede no ser representativo de otras poblaciones; y la medición se realizó a corto plazo (una semana después de la intervención), por lo que no se evaluó la retención a largo plazo ni la transferencia a otros contenidos del cálculo.

Se recomienda a los docentes dedicar al menos dos sesiones de clase al análisis de casos de raíz simple y multiplicidad impar, antes de abordar los casos de multiplicidad par, e incluir ejercicios de conversión entre representaciones algebraica y gráfica desde el inicio del curso. Se sugiere, además, extender el tiempo de práctica en los casos más complejos y utilizar herramientas de visualización dinámica (GeoGebra, Matlab) para facilitar la exploración del movimiento de la variable. Futuras investigaciones deberían examinar la retención a largo plazo de estos aprendizajes y su transferencia a otros contenidos, así como replicar el estudio con diseños experimentales más robustos (asignación aleatoria) y muestras más amplias y diversas.

Referencias

- Amaya De Armas, T. R., Pino-Fan, L. R., & Medina Rivilla, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144. <https://doi.org/10.24844/em2803.05>
- Báez Ureña, N., & Blanco Sánchez, R. (2020). La epistemología de la matemática en su didáctica. Mikarimin. *Revista Científica Multidisciplinaria*, 6(3), 105-116. <https://revista.uniandes.edu.ec/ojs/index.php/mikarimin/article/view/2057>
- Byas, R., & Blanco, R. (2017). *Didáctica de la Matemática en la formación docente*. SEDUCA. Sistema Editorial Universitario Centroamericano.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Elia, I. & Spyrou, P. (2006). How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 256-272. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1049>
- Guarin Amoroch, S. A. & Parada Rico, S. E. (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación Matemática*, 35(1), 197-223. <https://doi.org/10.24844/EM3501.08>
- Mosquera-López, S., Soto-Agreda, O. F., & Marmolejo-Avenia, G. A. (2023). El conocimiento acerca de las ideas matemáticas sobre el infinito: El caso de los educadores matemáticos en formación de la Universidad de Nariño. *Revista Perspectivas*, 8(S1), 97-103. <https://doi.org/10.22463/25909215.4062>
- Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79(3), 483-500. <https://doi.org/10.1348/000709908X398106>
- Rodríguez, O. H., & López Fernández, J. M. (2010). A semiotic reflection on the didactics of the chain rule. *The Mathematics Enthusiast*, 7(2&3), 321-332. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1183>
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257-285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4



Conflicto de intereses:

Los autores declaran no tener conflictos de intereses que afecten los resultados ni sus interpretaciones.

Síntesis curricular:

Neel Báez Ureña. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Máster en Matemática Pura. Profesor del Departamento de Matemática de la Universidad Acción Pro Educación y Cultura (APEC) de la República Dominicana. **Elizabeth Rincón Santana.** Doctor en Ciencias Pedagógicas. Máster en Matemática. Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Santo Domingo. **Ramón Blanco Sánchez.** Doctor en Ciencias Pedagógicas. Licenciado en Matemática. Profesor Titular y Consultante. Ostenta el Premio Pablo Miquel y varios premios de la Academia de Ciencias de Cuba. **Marines Angeri Artiles.** Máster en Enseñanza de la Matemática. Profesora Asistente del Departamento de Matemática de la facultad de Informática y Ciencias Exactas de la Universidad de Camagüey. Es la Jefa de Carrera de Educación Matemática.

Declaración de responsabilidad autoral:

Neel Báez Ureña y Elizabeth Rincón Santana. Realizaron la sistematización y valoración de la información, la ejecución de la investigación, y su redacción.

Ramón Blanco Sánchez. Tuvo a su cargo la dirección metodológica de la investigación y la orientación del enfoque pedagógico y didáctico.

Marines Angeri Artiles. Contribuyó en el perfeccionamiento del texto científico. Trabajó en la curación de los datos y el procesamiento de la información y su interpretación.

Editado por: Dr. C. Arnaldo Espindola Artola

Este es un artículo en Acceso Abierto distribuido según los términos de la Licencia Creative Commons: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.es> ES que permite el uso, distribución y reproducción no comerciales y sin restricciones en cualquier medio, siempre que sea debidamente citada la fuente primaria de publicación.

