Transformación, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, mayo-agosto 2024, 20 (2), e4606
Artículo

Problemática y necesidad de la enseñanza del concepto del límite funcional

The concept of functional limit: teaching needs and challenges

M. Sc. Marines Montalván García[1], https://orcid.org/0000-0002-9928-4626

Dr. C. Cila Eduviges Mola Reyes[1], https://orcid.org/0000-0001-7755-3605

Dr. C. Ramón Blanco Sánchez[1], https://orcid.org/0000-0002-5053-281X

[1]Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba

marines.montalvan@reduc.edu.cu

cila.mola@reduc.edu.cu

ramon.blanco@reduc.edu.cu

Resumen

Objetivo: El artículo se propone argumentar, desde la didáctica de la Matemática, la necesidad de que los estudiantes trabajen con la definición de límite funcional para que puedan apropiarse del concepto y sus características esenciales.
Métodos: Investigación-acción, análisis-síntesis, y la revisión documental.
Resultado: El resultado principal del estudio es una propuesta didáctica para el estudio del concepto de *límite* por parte de los estudiantes de ingeniería.
Conclusiones: Se arriba a una propuesta didáctica para guiar a los docentes para lograr que los estudiantes se apropien del referido concepto. Se incluyen varios ejemplos para guiar a los docentes en la aplicación de la propuesta.

Palabras clave: Educación Superior, conceptos matemáticos, matemática educativa, didáctica.

Abstract

Objective: The paper aims at giving arguments to support, from the didactics of Mathematics, the students' need to study the definition of functional limit so that they can appropriate the concept and its essential characteristics.
Methods: The authors follow an action research approach and rely on analysis-synthesis, and documents reviewing.

Result: The main finding is didactic proposal for engineering students to study the concept of *limit*.

Conclusions: The didactic proposal sets the guidelines for teachers to lead the engineering students' learning of the concept of *limit*. Several examples are included to illustrate teachers how to put the proposal into practice.

Keywords: higher education, mathematical concepts, mathematics instruction, didactics.

Recibido: 11 de noviembre de 2023
Aprobado: 30 de marzo de 2024

Introducción:

Lograr que los estudiantes no solo calculen límites más o menos complicados, sino que se apropien verdaderamente del concepto de *límite*, es una de las tareas más laboriosas que debe resolver la didáctica de la Matemática, solo hay que recordar cuanto tardó la humanidad en disponer y formalizar este concepto. Sin embargo, en la actualidad se espera que en unas pocas horas de clase los estudiantes sean capaces de manejar adecuadamente este concepto (Mellado et al., (2016).

En la bibliografía especializada no faltan trabajos con comentarios y propuestas para enfrentar esta problemática Kidron, (2015), Sjögren, (2011), Tall & Vinner, (1981), donde se plantean opiniones que se pueden considerar válidas desde el punto de vista didáctico, pero ciertamente es necesario continuar trabajando sobre la didáctica del concepto de límite.

En el presente artículo se aspira a integrar la matemática como ciencia en sí, su didáctica y las características ontológicas y epistemológicas, teniendo en cuenta los obstáculos epistemológicos según Hernández et al. (2017) con el fin de arribar a una nueva propuesta didáctica, con un enfoque integrador, que contribuya a la apropiación del concepto por parte de los estudiantes.

La necesidad de que los estudiantes dominen este concepto está fuera de discusión, dado que el mismo es básico tanto en el estudio de las derivadas como de las integrales. Especialmente para los estudiantes de ingeniería es una herramienta que les permitirá comprender muchos fenómenos que deberán estudiar en las diferentes especialidades ingenieriles, Guarin y Parada (2023).

Transformación, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, mayo-agosto 2024, 20 (2), e4606

Métodos

Esta investigación sigue en lo fundamental una metodología de orden cualitativo. Se asumen como métodos el análisis documental (Hernádez-Sampieri & Torres, 2018), y la sistematización del contenido (Morales, et al., 2014).

Resultados y discusión

Bases teóricas

Dado el carácter sistémico de la matemática es necesario tener en cuenta la teoría APOE de Ed Dubiski, ya que efectivamente no se puede decir que el estudiante se ha apropiado de un concepto si no lo ha incorporado en la estructura conceptual que ya posee, lo cual se logra a través del tránsito del proceso al objeto Dubinsky & McDonald (2001), lo que en la teoría APOE denominan esquema conceptual, Baker et al. (2016). La necesidad de la actividad procesal para arribar al concepto también es analizada por otros especialistas en el tema como se plantea en Báez y Blanco (2020).

En la estructura sistémica de la matemática hay que tener en cuenta también el lenguaje propio con la función como componente esencial para establecer relaciones entre los objetos y fenómenos que se estudian Riccomini et al. (2015), Amaya et al. (2016).

Resulta importante lo referente a los cambios de registros de representación semiótica, para el análisis del concepto de límite en sus diferentes representaciones, dado que cada representación pone de manifiesto diferentes aspectos del concepto, donde resulta fundamental que los estudiantes vean en cada representación diferentes aspectos del concepto y no como objetos relacionados pero diferentes; considerando aquí la representación en el sentido de Duval (1999), donde la representación se refiere a las diferentes formas para denotar objetos, literal, analítica o gráficamente, y como la información es codificada.

Dado que el lenguaje es una forma de materializar objetos matemáticos mediante su representación literal, se hace necesario tener en cuenta el lenguaje matemático como una forma especial de lenguaje, este se caracteriza por su densidad de información, confiable (no admite ambigüedades) y su nivel de abstracción De Olivera & Cheng, (2011), el lenguaje matemático establece con claridad la diferencia entre proceso y objeto, como es el caso "sumar dos números o la suma de dos números. La eficiencia en el trabajo matemático incluye la habilidad de razonar mediante el lenguaje escrito y hablado.

Como fue referido anteriormente, en la bibliografía especializada existen trabajos importantes sobre el tratamiento didáctico del concepto de límite, pero se requiere un análisis integrado de su didáctica, características ontológicas y epistemológicas, el tránsito del proceso al objeto, los cambios de registros de representación y el uso preciso del lenguaje matemático, en aras de que efectivamente los estudiantes se apropien del concepto de límite.

Evidentemente el concepto de límite y el de infinito matemático están estrechamente relacionados, pero en la representación del infinito matemático con el símbolo "∞" los docentes y algunos textos de Matemática lo emplean como un número y no como un concepto, esto es, al explicar a los estudiantes que siendo k un número real distinto de cero k/∞= 0, es usual que el docente diga: "k dividido por infinito" y no "k dividido por una cantidad que tiende a infinito"; para muchos profesores es intrascendente una cosa u otra, pero en el primer caso da la idea de que el símbolo "∞" es un número y no un concepto. En este caso cuando el alumno considera este símbolo como un número, puede asumir que cuando se habla de las formas indeterminadas ∞-∞ debe ser cero, porque es la resta de dos números iguales, ídem con ∞/∞ que debía ser uno, pero no le queda otra que aceptar que es indeterminado porque así lo dice el maestro o el libro de texto.

Otro abuso de lenguaje importante sucede cuando se plantea: 1^{∞} es indeterminado, ciertamente no importa cuántas veces se multiplique 1 por sí mismo seguirá siendo uno, en este caso es muy importante especificar que es una cantidad que tiende a 1 elevada a una cantidad que tiende a infinito lo que resulta indeterminado. Por lo que el hecho de que los estudiantes vean el símbolo "∞" como un concepto, les ayudará a comprender el concepto de límite.

En determinados trabajos sobre la enseñanza del límite se plantea primero trabajar con funciones de R en N, (sucesiones) para después trabajar con funciones de R en R, no se puede negar que el trabajo con las sucesiones es más simple que con las funciones en general, pero hay que tener en cuenta que el tiempo planificado en los programas docentes es limitado y lo que pueda ayudar el trabajo con las sucesiones en primera instancia no compensa la reducción del tiempo para el trabajo con las funciones en general.

Aproximación intuitiva a la idea del límite matemático

En la bibliografía especializada se argumenta ampliamente que el proceso de aprendizaje se desarrolla, o debe ser explicado basado en la interrelación entre las concepciones estructural y operacional del mismo concepto Domingos, (2010), a través de las etapas de formación del concepto se concluye que el tránsito de la forma operacional al concepto abstracto transita por las etapas que plantea la teoría APOS Dubinsky & McDonald (2001).

Por lo que resulta oportuno iniciar el trabajo con el concepto de límite con funciones polinómicas en forma intuitiva para lograr una imagen del concepto e introducir el movimiento de la variable, que caracteriza el estudio del límite y en general el Cálculo Diferencial e Integral.

En este inicio intuitivo del concepto de límite, el infinito matemático y el símbolo "∞" juegan un papel fundamental, así como el uso del lenguaje, donde la forma correcta de referirse al movimiento de la variable a infinito es decir que tiende a infinito y en ningún momento plantear que la variable es infinita, usando la notación $x \rightarrow \infty$; por las razones expuestas no se debe escribir $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty$ se debe escribir $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-1} \rightarrow \infty$ para destacar el carácter conceptual del símbolo "∞".

En esta introducción intuitiva del límite para funciones polinómicas, el alumno comprende sin dificultad que si a > 1, $\lim_{x\to\infty} x^a \rightarrow \infty$ y que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0$, lo cual se puede apoyar con representaciones gráficas usando un asistente matemático como el GeoGebra, desde aquí resulta fácil explicar el cálculo de límites de cocientes de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo P(x) y Q(x) funciones polinómicas, donde los primeros ejemplos se deben resolver dividiendo por la variable de mayor exponente. Aquí para mantener a los estudiantes entrenados en el tecnicismo algebraico es aconsejable plantear tareas donde sea menester efectuar operaciones algébricas con los polinomios involucrados en la tarea. Posteriormente el estudiante puede generalizar que el límite cuando $x \rightarrow \infty$ de un cociente de funciones polinómicas será "0" o "∞" dependiendo de la posición que ocupe la variable de mayor exponte. Ya en este punto se debe también analizar los casos en que ambos polinomios tienen el mismo grado donde sí se debe dividir por la variable de mayor exponente para mayor claridad para los estudiantes.

Hasta aquí se ha logrado que los estudiantes tengan una imagen operacional inicial del concepto de límite, con lo cual pueden calcular límites sin disponer del concepto de límite propiamente dicho.

El movimiento de la variable

Una dificultad fundamental en el estudio del límite está determinada por el movimiento de la variable, en particular por las diferentes formas en que se manifiesta este movimiento y además porque está presente la interrelación del movimiento de la variable independiente y la dependiente ligadas por la función que es una herramienta del lenguaje matemático para la materialización semiótica del movimiento de las variables. El uso de las transferencias de representaciones semióticas entre diferentes registros de representación, apoyados por los asistentes matemáticos, resulta una herramienta didáctica fundamental para que los estudiantes puedan apreciar el movimiento de la variable.

Es importante la argumentación conceptual de las diferentes formas en que se manifiesta el movimiento de la variable; esto es: el movimiento de la variable al infinito, el movimiento de la variable en aproximación a una recta o curva y el movimiento de la variable en aproximación a un punto, Báez (2018).

El movimiento de la variable al infinito es el más intuitivo, ya que se corresponde con la idea de algo que crece indefinidamente; en el análisis de este movimiento se debe destacar la interrelación de movimientos entre las variables, por ejemplo en el caso: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^3 + x^2 - 4} \to \infty$ ambas variables se mueven al infinito, por lo que se dice que es un límite infinito, mientras que en el caso: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3 + x^2 - 4} = 0$ la variable independiente se mueve al infinito pero la dependiente se anula, en este caso se dice que es un límite finito en el infinito.

El movimiento de la variable en aproximación a una recta o curva caracteriza el desarrollo asintótico de diferentes curvas, lo cual significa que se aproximan cada vez más a la recta o curva, según la abscisa crece continuamente o se aproxima indefinidamente a un valor determinado. Aquí surge un conflicto con los conocimientos previos de los estudiantes, que pueden haber aprendido que una asíntota es una recta, a la cual la curva se aproxima sin llegar a cortarla, condición, que aunque se cumple en muchos casos, no es un requisito para la existencia del movimiento asintótico. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ tiene la asíntota que es la curva g(x) = $x^2 - x + 1$ y la asíntota vertical x = -1, las que aparecen en rojo en el gráfico #1 que se muestra.

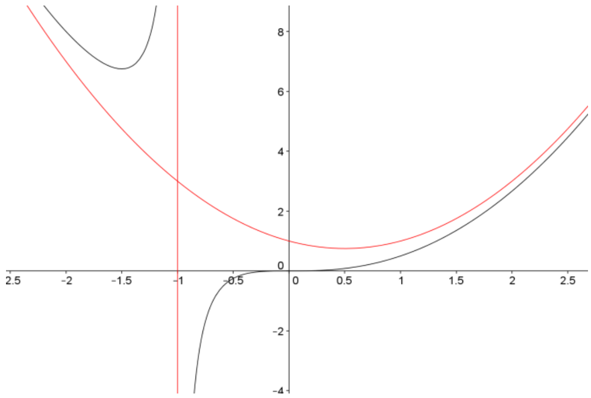


Gráfico # 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	3.4	1.5	5.0
2.1	3.857142857	1.9	4.157894737
2.01	3.985074627	1.99	4.015075377
2.001	3.998500750	1.999	4.001500750
2.0001	3.999850007	1.9999	4.000150008
2.00001	3.999985000	1.99999	4.000015000

De acuerdo al análisis intuitivo anterior el alumno debe saber que: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x+1} \to \infty$ pero ahora puede ver que además se aproxima a sus asíntotas y apreciar la interrelación del movimiento entre la variable independiente y la dependiente.

El movimiento de la variable en aproximación a un punto es el movimiento menos intuitivo de la variable, dado que, en los objetos concretos, cuando algo se aproxima continuamente a un lugar termina por llegar a ese lugar, pero ese no es el caso en Matemática y aquí surge un aspecto clave del concepto de límite, que es determinar cuánto la variable se aproxima a un determinado valor.

Formalización del concepto de límite

El análisis intuitivo realizado hasta ahora sienta las bases para el tránsito del preconcepto al concepto científico de límite, aunque primeramente es necesario plantear una descripción literal del mismo: Decimos que la función f(x) se aproxima (tiende) al límite L cuando la variable se aproxima a un punto determinado; o bien $\lim_{x \to a} f(x) \to L$ cuando x tiende al punto **a.**

En una forma más precisa: decimos que el límite de f(x) es L cuando x se aproxima al punto **a** y escribimos: $\lim_{x \to a} f(x) \to L$ siempre que podamos aproximar f(x) a L tanto como queramos para toda x suficientemente próxima al punto **a**, por ambos lados, sin que x alcance o no el punto **a.** lo cual significa que cuando x se acerca cada vez más al punto **a**, (por ambos lados) entonces f(x) se acerca cada vez más a L, o sea, cuando la variable independiente se mueve hacia x = **a,** f(x) tiene que moverse hacia L.

Lo cual es oportuno ilustrar numéricamente con un ejemplo como el siguiente: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x} = 4$

Además, ilustrar el ejemplo gráficamente, lo que se muestra en el gráfico número 2.

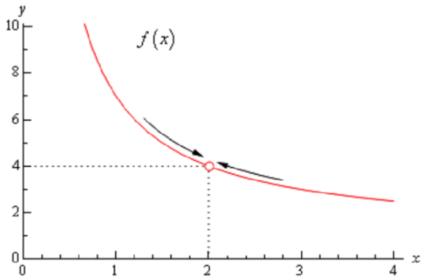


Gráfico #2

Después de usar otros ejemplos como el que se ha ilustrado, se debe explicar a los estudiantes que se hace necesario disponer de los medios para poder precisar el grado de aproximación de la variable dependiente a L en función de la aproximación de la variable independiente al valor **a**, lo cual implica la necesidad de formalizar la definición de límite.

Para estudiantes de ingeniería la definición formal se debe plantear sin usar los símbolos que representan a los cuantificadores, ya que estos estudiantes generalmente no manipulan estos símbolos, por tal razón los mismos dificultan adicionalmente la comprensión de la definición, la que debe ser planteada como se explica a continuación.

La definición formal de límite sin el uso de los cuantificadores se puede encontrar en diferentes formas equivalentes y lógicamente muy parecidas, pero es útil plantearla en más de una forma para que el estudiante pueda precisar los aspectos esenciales de la misma, por ejemplo:

- Sea f(x) definida en un intervalo que contiene x=a, excepto posiblemente en x=a. Entonces se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 \leq |x - a| < \delta$

- Sea f una función definida en una vecindad del punto (b,0). Se dice que $\lim_{x \to b} f(x) = L,$ si para cada número positivo $\varepsilon > 0$, por pequeño que este sea, es posible determinar un número positivo $\delta > 0$, tal que para todos los valores de x, diferentes de b, que satisfacen la desigualdad $|x - b| < \delta$ se verifica la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Límite de $\lim_{x \to b} f(x) = L,$ significa que según x se aproxima más y más al valor **a,** f(x) se aproxima más y más a L, esto es: Si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Lo cual se puede apoyar con un gráfico como el que se presenta en el gráfico número 3:

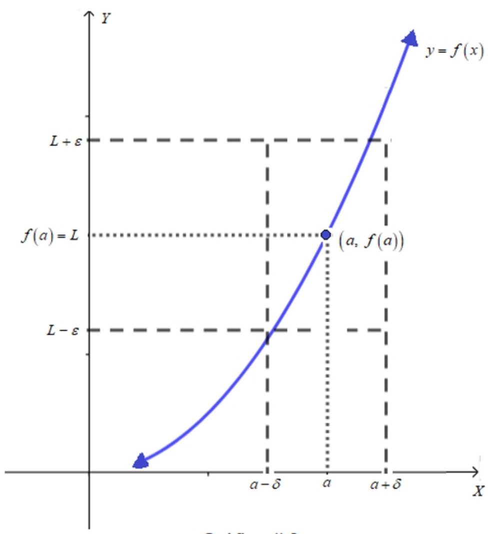


Gráfico # 3

De estos enunciados el estudiante debe concluir que para que la función f(x) tenga por límite L, deben existir los números $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ además de cumplirse las desigualdades $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$; teniendo en cuenta que la expresión:

"para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ indica una dependencia funcional de δ respecto a ε, pues en dependencia del ε que se plantee se debe encontrar el δ que corresponda. También es necesario indicar a los estudiantes que aunque no aparece así en ninguna de las tres definiciones planteadas, debe ser $0 \leq |x - a| < \delta$ ya que no es necesario que llegue a ser x = a, aunque lo puede ser. Donde las expresiones $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $0 < |x - a| < \delta$ permiten evaluar el grado de aproximación de f(x) a L y de x al punto **a**.

Es usual que en algunos textos y en muchas clases de cálculo no se use la definición para calcular límites, pero es una realidad que en Matemática lo que no se usa no se aprende, luego si los estudiantes no se apropian de esta definición, no se puede decir que tengan el concepto de límite, ya que la definición materializa el concepto de límite y el hecho de que los estudiantes memoricen esta definición en cualquiera de sus formas no quiere decir que se hayan apropiado del concepto de límite.

Ciertamente el que los estudiantes realicen el análisis de las diferentes formas de la definición y lleguen a las conclusiones indicadas contribuye a que avancen en la apropiación del concepto, lo que es parte del tránsito del proceso al objeto. Pero el uso de la definición en el cálculo de algunos límites produce la necesaria actividad con el concepto para lograr su apropiación. Por supuesto los límites a calcular usando la definición deben ser tales que el trabajo algebraico no absorba la atención de los estudiantes.

A continuación se plantean algunos ejemplos para el cálculo de límites usando la definición:

Ejemplo 1:

Demostrar que $\lim_{x \to 5}(2x+1) = 11$

En este caso tenemos: f(x) = 2x +1, L = 11 donde la pregunta a responder es: cuán próximo a 5 debe estar x si se requiere estar seguros de que f(x) = 2x + 5 difiere en menos de ε de L = 11, para lo que se debe cumplir que $|f(x) - L| < \varepsilon$ Tenemos que: $|f(x) - L| = |(2x+1) - 11| = |2x - 10| = 2|x - 5| = 2|x - a|$, de donde podemos concluir que si $2|x - a| < \varepsilon$ entonces tenemos también $|f(x) - L| < \varepsilon$, o bien si: $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por lo tanto hemos encontrado la relación funcional $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ que permite asegurar que sin importar cuan pequeño puedas ser ε tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ se garantiza que $|(2x+1) - 11| < \varepsilon$

El resultado se puede ilustrar eficientemente usando el GeoGebra, este software permite hacer una representación dinámica, como la que se presenta en el gráfico número 4, que por demás resulta muy fácil de construir, pues se grafica la función, las rectas y = L x = a, se construye el deslizador y finalmente las rectas y = ± ε, x = ± δ entonces moviendo el deslizador se puede ver como para todo ε > 0 existe:

$\delta > 0$, tal que, si $|x - a| < \varepsilon / 2$ entonces $|f(x) - L| < \delta.$

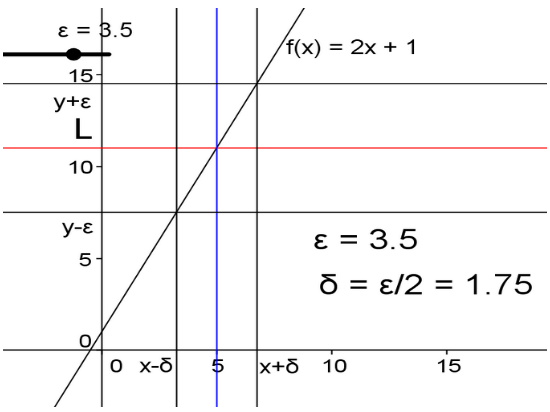


Gráfico # 4

Este tipo de ejemplo es perfectamente comprensible por los estudiantes y cambiando la función y el valor del límite se les pueden plantear algunos ejercicios más para su estudio independiente. Usando álgebra elemental se pueden obtener ejemplos algo más interesantes como el siguiente:

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-2x-3}{x-3}\right)=4$$

Demostrar que:

Como se explicó en el ejemplo anterior necesitamos demostrar que dado un $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $|x-3|<\delta$ entonces se cumple que: $\left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|<\varepsilon$:

Luego sumando, $\left|\frac{x^2-2x-3-4(x-3)}{x-3}\right|<\varepsilon$ simplificando $\left|\frac{x^2-2x-3-4x+12}{x-3}\right|<\varepsilon$ y factorizando la expresión resultante se tiene: $\left|\frac{(x-3)^2}{x-3}\right|<\varepsilon$ o bien: $|x-3|<\varepsilon$ por lo tanto, en este caso $\varepsilon=\delta$ y la relación funcional obtenida es la función idéntica.

Este caso se puede ilustrar usando el GeoGebra de la misma forma que el ejemplo 1, donde se puede apreciar que el gráfico de la función $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ satisface las condiciones para la existencia del límite.

A continuación se muestra un ejemplo en apariencia más complicado, pero que en realidad resulta no tener complicaciones ajenas a la aplicación de la definición.

Ejemplo 3: Probar que $\lim_{x\to 0}(3x\,sen(x)+1)=1$

Procediendo como en los ejemplos anteriores se requiere demostrar que dado un $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $|x-0|<\delta$ entonces $|3xsen(x)+1-1|<\varepsilon$, en este caso se tiene: $|3xsen(x)|<\varepsilon$ donde solo es necesario tener en cuenta que sen(x) ≤ 1 para plantear $3|x|\cdot 1<\varepsilon$ de done resulta $|x|<\frac{\varepsilon}{3}$ o lo que es lo mismo $|x-0|<\frac{\varepsilon}{3}$ siendo en este caso la relación funcional $\frac{\varepsilon}{3}$

Resulta aconsejable aplicar la definición a límites en el infinito como es el caso en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4: Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ aplicando la definición de límite.

Aquí $f(x)=\frac{1}{x}$ y el límite es cero cuando x tiende a infinito, por lo tanto se requiere probar que para ε > 0 se cumple que $\left|\frac{1}{x}-L\right|<\varepsilon$ para cualquier x > A siendo en este caso la esencia del problema como determinar A, evidentemente A no debe depender de x pero es razonable pensar que dependa de ε. Podemos asumir que x tiende a + ∞ y por lo tanto trabajamos con x positiva, lo cual implica que $\frac{1}{x}<\varepsilon$ es equivalente a $x>\frac{1}{\varepsilon}$ lo cual nos dice como elegir A, esto es, dado un ε cualquiera mayor que cero, elegimos A tal que: $A=\frac{1}{\varepsilon}$

Se concluye entonces que se garantiza que $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\varepsilon$ para cualquier x > A; en otras palabras, se ha probado que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Como se puede apreciar, ejemplos como los mostrados son asequibles a los estudiantes de ingeniería y además se pueden variar fácilmente para plantear este tipo de tareas como trabajo independiente.

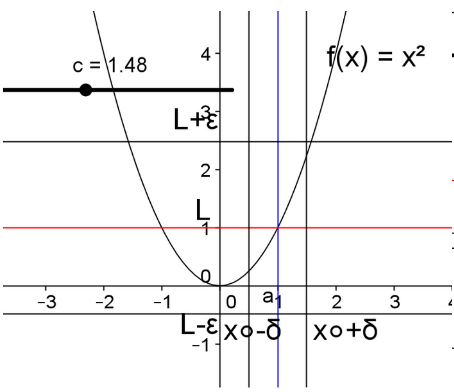
Por último, se plantea un ejemplo que requiere algo más de análisis, pero que puede ser usado en clase si se logra que los estudiantes se interesen en el uso de la definición para demostrar la existencia de un límite.

Ejemplo 5: Demostrar que $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

Ahora $f(x) = x^2$, L = 1, a = 1 y la demostración consiste en cuantificar cuan pequeño debe ser $|x - 1|$ para garantizar que $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Como en los casos anteriores se analiza $|x^2 - 1| < 1$ de donde se obtiene: $|x^2 - 1| = |(x - 1)(x + 1)| = |x - 1||x + 1|$ donde el factor $|x + 1|$ introduce un elemento nuevo en el proceso; el recurso para lograr demostrar lo pedido consiste en tener en cuenta que lo que interesa aquí es evaluar aproximación, por lo que podemos trabajar considerando $\delta < 1$, entonces si $|x - 1| < \delta < 1$ se tiene: -1 < x-1< 1, o bien 0 < x < 2 y por tanto se tiene que: $|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < 3|x - 1|$, para asegurar que $|x^2 - 1| < \varepsilon$ se debe cumplir que $3|x - 1| < \varepsilon$ o bien: $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ de donde resulta que se debe tomar $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$, pero como este resultado se obtuvo asumiendo $\delta \le 1$, en caso de que $\frac{\varepsilon}{3} > 1$ se debe elegir $\delta = 1$ en lugar de $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$. Resumiendo, se debe elegir δ igual al menor valor entre 1 y $\frac{\varepsilon}{3}$.

Queda así demostrado que eligiendo a δ de esta manera entonces $|x - 1| < \delta$ implica que $|x^2 - 1| < \varepsilon$ lo que se abrevia con la notación: δ = min(1, $\frac{\varepsilon}{3}$). Lo cual se ilustra en los gráficos 5 y 6:



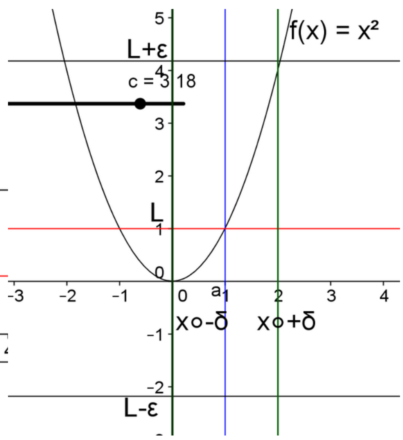


Gráfico #5 Gráfico #6

Aquí se ha presentado el gráfico #5 para $\frac{\varepsilon}{3} < 1$ y el #6 para $\frac{\varepsilon}{3} > 1$ pero en el software en GeoGebra basta con mover el deslizador para pasar de un gráfico al otro.

Siendo consecuentes con lo que se plantea en la bibliografía especializada, respecto al tránsito del proceso al objeto, estos tipos de ejercicios resultan necesarios para que los estudiantes comprendan y se apropien del concepto de límite lo cual es muy diferente a que los estudiantes lleguen a dominar diferentes técnicas para calcular límites donde la propia definición de límite no se materializa. Además, este tipo de ejercicios permite la materialización semiótica de los diferentes movimientos de las variables, mediante el uso del lenguaje matemático en registros gráficos, analíticos y literales.

Aplicación de la propuesta

Realmente el hecho de que el alumno pueda usar la definición para probar algunos límites y se apropie del concepto de límite, no implica que mejore sus habilidades para el cálculo de límites usando las diferentes técnicas y algoritmos que existen al respecto, los beneficios de que el estudiante se apropie del concepto de límite, se harán manifiestos cuando el estudiante enfrente otros conceptos matemáticos basados en el concepto de límite, como continuidad, estudio de las asíntotas, derivada y la integral definida entre otros.

Es necesario que los estudiantes vean en el aprendizaje de cada concepto la adquisición de una herramienta para el trabajo matemático, dado que una característica de la Matemática es que la misma se construye con herramientas matemáticas, porque es usual que los estudiantes solo se interesen por los resultados matemáticos que se aplican en otras disciplinas o en problemas de la actividad práctica. De estos planteamientos se derivan dos tipos de enseñanza de la Matemática, la enseñanza conceptual y la algorítmica, la primera con una intención formativa y la segunda con una intención práctica. Pero es necesario tener en cuenta que la enseñanza de la Matemática no solo debe propiciar conocimientos, también formas del pensamiento útiles en otras ciencias y en la vida de cada persona. Por otra parte, para la modelación de problemas técnicos es fundamental el dominio conceptual de la Matemática.

Con el objetivo de apreciar la influencia del trabajo con la definición de límite en el cálculo de algunos límites en el dominio del concepto, se aplicó el siguiente cuestionario a dos grupos de 30 estudiantes de ingeniería mecánica de la Universidad de Camagüey. Un primer grupo identificado como Grupo A y el segundo como Grupo B; en el Grupo A se introdujo el trabajo con los límites como se explicó anteriormente, así como el usó de la definición para el cálculo de algunos límites y en el Grupo B se planteó y explicó la definición, pero sin aplicarla al cálculo de límites.

Cuestionario:

1. Por qué en la definición de límite se debe tener en cuenta que $|x - a| < \delta$ pero también que puede ser mayor o igual que cero.
2. Cuál es la relación funcional que liga la variación ε, δ en la definición de límite.
3. Qué tan próximo debe estar f(x) de L según x se acerca a x_o para poder decir que $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$
4. Qué puede decir de la expresión: x está suficientemente próxima a x_o Seleccione una de las siguientes opciones: intuitiva___ precisa___ ambigua____ criterial___ explicativa ____
5. Por qué la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ no tiene límite en x = 1 y la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ sí.
6. Puede la función f(x) tener límite en x=c si f(x) no está definida en x=c. Diga por qué.

Análisis de los resultados

Pregunta 1: En el grupo A, 25 estudiantes el 83% respondieron correctamente, en el Grupo B solo el 4% dio una respuesta correcta.

Pregunta 2: En el grupo A, 27 estudiantes el 90% respondieron correctamente, en el Grupo B solo el 13% dio una respuesta correcta.

Pregunta 3: En el grupo A, 21 estudiantes el 71% respondió con precisión usando la relación ε - δ y el 2% respondió intuitivamente. En el grupo B el 60% respondió intuitivamente y el resto no respondió.

Pregunta 4: En el grupo A, 19 estudiantes el 63% marcaron la opción ambigua y el resto marcó la opción intuitiva. En el grupo B, 13 estudiantes marcaron la opción explicativa, 8 la opción precisa y el resto la opción criterial.

Pregunta 5: En el grupo A, 23 estudiantes el 76% argumentó que la función no tiene que estar definida en el punto para tener límite, el resto de este grupo argumentó que en el caso de la segunda función tiene un valor indeterminado en x=1 por lo que puede tener límite en ese punto. En el grupo B el 56% también argumentó lo de la indeterminación de la segunda función y el resto no respondió.

Pregunta 6: Como se puede apreciar aquí se pregunta lo mismo que en la pregunta anterior, pero al ser planteada de forma general implica una respuesta también general. En el grupo A, 21 estudiantes respondieron con el mismo argumento correcto de la respuesta a la pregunta anterior, sin embargo, hubo 2 estudiantes que no se percataron de que era la misma idea de la pregunta 5, el resto de los alumnos de este grupo respondió correctamente pero no supieron justificar su respuesta. En el grupo B, 17 estudiantes respondieron que sí y 13 que no sabían, aunque de los que respondieron que sí, ninguno explicó correctamente por qué.

Como se puede apreciar de las respuestas al cuestionario, los estudiantes que trabajaron con la definición de límite para demostrar el valor de algunos límites, logró una mejor comprensión de lo que plantea esta definición, esto es, del concepto de límite funcional propiamente dicho, lo cual se corresponde con la planteado en la literatura especializada sobre el tránsito del proceso al objeto.

La ejemplificación planteada ilustra cómo es posible entrenar a los estudiantes de una manera práctica en el trabajo con la definición de límite, sin que la atención de los mismos se desvíe hacia una operatoria algebraica complicada, estas tareas o ejercicios propician el tránsito proceso-objeto, en aras de lograr una formación conceptual de los estudiantes.

Se enfatiza que la propuesta didáctica del trabajo es específicamente referida a al proceso enseñanza aprendizaje del concepto de límite funcional y no al tema de límites en general, desde luego, se asume que el buen dominio del concepto contribuye al buen aprovechamiento del resto del tema.

La comprobación realizada muestra la influencia positiva que resulta del trabajo con la definición para el buen dominio de los componentes de la definición y la definición en sí misma.

Conclusiones

La ejemplificación propuesta ilustra cómo es posible capacitar a los estudiantes de manera práctica en el trabajo con la definición de límite, sin que su atención se desvíe hacia operaciones algebraicas complicadas, estas tareas o ejercicios favorecen el tránsito proceso-objeto, para lograr una formación conceptual en los estudiantes.

Se destaca que la propuesta didáctica, que aquí se presenta, está específicamente referida al proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite funcional y no al tema de límites en general, por supuesto, se asume que el buen dominio del concepto contribuye a al buen uso del resto del tema.

La verificación realizada muestra la influencia positiva que resulta de trabajar con la definición para contribuir al dominio de los componentes de la definición y de la definición en sí misma.

Referencias bibliográficas:

Amaya, T., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, *28*(3), 111-144. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n3/1665-5826-ed-28-03-00111.pdf

Báez, N. (2018). Estrategia didáctica para la formación de conceptos en el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial de una variable real en las carreras de ingeniería. *Tesis Doctoral inédita*. Universidad de Camagüey, Cuba.

Báez, N. y Blanco, R. (2020). La epistemología de la matemática en su didáctica. Mikarimin. *Revista Científica Multidisciplinaria*, *6*(3), 105-116. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8605598.

Baker, W., Dias, O. & Czarnocha, B. (2016). Creating action schema based on conceptual knowledge. *Didactica mathematicae*, (38), 5–31. https://eudml.org/doc/292622.

De Olivera, L. & Cheng, D. (2011). Language and the Multisemiotic Nature of Mathematics. *The Reading Matrix*, *11*(3), 255-268. https://eric.ed.gov/?id=EJ967315.

Domingos, A. (2010). *Learning advanced mathematical concepts: the concept of limit.* https://hal.science/hal-02182374/file/cerme6_proceedings.pdf#page=2348.

Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking*. https://eric.ed.gov/?id=ed466379.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (págs. 273-280). New York, USA: Kluwer Academic Publishers.

Guarin, A. y Parada, S. (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación Matemática, 35*(1), 197-228. https://www.redalyc.org/journal/405/40576229009/40576229009.pdf.

Hernández, C., Prada, R. y Ramírez, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad. *Perspectivas, 2*(2), 73-83. https://revistas.ufps.edu.co/index.php/perspectivas/article/view/1316.

Hernádez-Sampieri, R. & Torres, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativas; cualitativa y mixta* (6ta ed.). Ciudad México: Mc. Graw Hill Education. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/64591365/Metodolog%C3%ADa_de_la_investigaci%C3%B3n._Rutas_cuantitativa__cualitativa_y_mixta-libre.pdf?1601784484=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DMETODOLOGIA_DE_LA_INVESTIGACION_LAS_RUTA.pdf

Riccomini, P. J., Hughes, E. & Fries, K. (2015). The languages of Mathematics: The importance of teaching and learning Mathematical vocabulary. *Reading and writing, 31*(3), 235-252. Recuperado el 10 de septiembre de 2023, https://eric.ed.gov/?id=EJ1060695

Kidron, I. (2015). *The epistemological dimension revisited.* https://hal.science/hal-01289449/.

Mellado, J., Sánchez, M. y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación Matemática*. *28*(1), 125-152. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5989359

Morales, M., Fuentes, N. y Rodríguez, H. (2014). La sistematización como método de la investigación educativa en la formación inicial de profesores. *Revista Varela*, *14*(37), 75-85. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8313845.

Sjögren, J. (2011). Concept Formation in Mathematics. *Tesis doctoral inédita*, Universidad de Gotemburgo, Suecia. https://www.divaportal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A512099&dswid=-4264.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-69. Recuperado el 10 de septiembre de 2023, de https://link.springer.com/article/10.1007/BF00305619.

Síntesis curricular.

Marinés Montalván García: es Profesora Auxiliar en el Dpto. de Matemática de la Facultad de Informática de la Universidad de Camagüey. Acumula más de 15 años de experiencia en la enseñanza de la Matemática a estudiantes de diferentes niveles. Ocupa el cargo de 2do. Jefe del Dpto. de Matemática. En estos momentos trabaja en el desarrollo de su tesis doctoral, trabajo en el que ha mostrado resultados en los seminarios realizados en el centro de estudios CECEDUC, de la Universidad de Camagüey.

Cila Eduviges Mola Reyes: es Profesora Titular, en el Dpto. de Matemática de la Facultad de Informática de la Universidad de Camagüey. Acumula más de 35 años de experiencia en la enseñanza de la Matemática a estudiantes de diferentes niveles. Es miembro del tribunal de categorías docentes del Dpto. de Matemática de la Facultad de Informática de la Universidad de Camagüey, ha representado a su país en diferentes eventos internacionales relacionados con educación

matemática. Tiene varias publicaciones científicas en las áreas de su especialización.

Ramón Blanco Sánchez es Profesor Titular y Profesor Consultante, en el Dpto. de Matemática de la Facultad de Informática de la Universidad de Camagüey. Acumula más de 45 años de experiencia en la enseñanza de la Matemática a estudiantes de diferentes niveles, los trabajos de investigación desarrollados sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática han producido resultados que se han publicado, presentado en congresos internacionales y publicados en revistas nacionales y extranjeras. Se ha desempeñado como tutor y tribunal de maestrías y doctorados. Ha desarrollado actividades de postgrado en universidades cubanas, mexicanas y dominicanas. En reconocimiento a su trabajo investigativo se le otorgó el Premio Pablo Miquel Merino en el año 2021 y la Orden Carlos J. Finlay en el año 2023.

Declaración de responsabilidad autoral:

Cila Eduviges Mola Reyes: Tuvo a su cargo la revisión bibliográfica y el análisis de los trabajos de los estudiantes en el ensayo realizado, y la redacción y revisión del trabajo en un 30%.

Ramón Blanco Sánchez: Tuvo a su cargo la confección de las preguntas del ensayo y la redacción y revisión del trabajo en un 50 %. Colaboró en la revisión bibliográfica y el análisis de los trabajos de los estudiantes en el ensayo realizado.

Marinés Montalván García: Tuvo a su cargo la aplicación y revisión de los resultados del ensayo. La revisión de los asentamientos bibliográficos. 20%